# Chapitre 1

# Equations du second degré

## 1.1 Fonctions polynômes du second degré

**Définition 1** *On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction $P$, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont des réels avec $a \neq 0$*
*L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée trinôme du second degré.*

Exemples : $x^2 - 7x + 12$
$(x + 1)(x + 2)$ peut s'écrire $x^2 + 3x + 2$

**Définition 2** *On appelle racine du trinôme toute valeur de la variable $x$ solution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$*

Exemple : 3 est une racine du trinôme $2x^2 - 4x - 6$ en effet $2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 6 = 0$.

Exercice : Trouver les racines du trinôme $x^2 - 3$ :
On résout l'équation $x^2 - 3 = 0$ par factorisation : $(x - 3)(x + 3) = 0$ et on trouve $S = \{-3; 3\}$.
D'une manière générale, comment trouver les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ ?
Le principe est de transformer le trinôme pour que la variable $x$ n'apparaisse qu'une seule fois.

## 1.2 Forme canonique du trinôme

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

**Définition 3** *La forme $a\left((x + \alpha)^2 + \beta\right)$ s'appelle la forme canonique du trinôme.*

Comment mettre un trinôme sous forme canonique ?

Exemple : $x^2 - 8x + 9$
or $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$
$x^2 - 8x + 9 = (x - 4)^2 - 16 + 9 = (x - 4)^2 - 7$

Cas général : $ax^2 + bx + c$

On met a en facteur $(a \neq 0)$ : $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

d'où $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

Pour simplifier cette écriture, posons $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta$ s'appelle le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a donc : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

## 1.3 Résolution d'une équation du second degré

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a \neq 0)$ revient à résoudre l'équation : $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$ qui s'écrit encore :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Dans cette expression, tout est positif sauf peut-être $\Delta$, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1** *D'après ce qui précéde, il résulte que si :*

1. $\Delta < 0$ *l'équation n'a pas de solution réelle.*
2. $\Delta = 0$ *l'équation a une seule solution* $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
3. $\Delta > 0$ *l'équation a deux solutions :* $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples :

$x^2 - 4x + 4 = 0$ ici $x_0 = 2$ ; $\Delta = 0$ car $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$-6x^2 + x + 1$ ; $\Delta = 25$ d'où $x_1 = \frac{1+5}{-12} = -\frac{1}{2}$ ; $x_2 = \frac{1-5}{-12} = \frac{1}{3}$

$5x^2 + 6x + 2 = 0$ ; $\Delta = -4$ pas de solution réelle.

## 1.4 Factorisation et signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

**Théorème 2** *Soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant du trinôme* $ax^2 + bx + c$.
*Le trinôme se factorise en produit de facteurs du premier degré ainsi :*
*Si* $\Delta > 0$ *:* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ *où* $x_1$ *et* $x_2$ *sont les racines du trinôme.*
*Si* $\Delta = 0$ *:* $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ *ou* $x_0$ *est la racine double du trinôme.*

Etudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $\Delta > 0$ : soient $x_1$ et $x_2$ ses racines, avec (pour fixer les idées) $x_1 < x_2$.
On a alors, daprès le théorème précédent la factorisation suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Faisons un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty \qquad x_1$ | | $x_2 \qquad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x-x_1)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-x_2)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x-x_1)(x-x_2)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | du signe de $a$ | signe opposé de $a$ | du signe de $a$ |

Si $\Delta < 0$ : on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Comme $\Delta$ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de f(x) est donc le même que celui de $a$. Récapitulons :

**Théorème 3** *Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de $a$ sauf entre les racines lorsqu'elles existent.*
*Et en particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant. (Celui de $a$)*

Exemple : résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \geq 0$.
On a $\Delta = 12 > 0$ , $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$
or, ici $a = 1$ est positif
donc le trinôme est toujours positif sauf entre ses racines.
Les solutions de l'inéquation sont donc les réels de l'intervalle $]-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty[$.

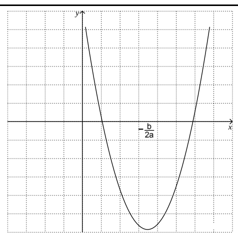
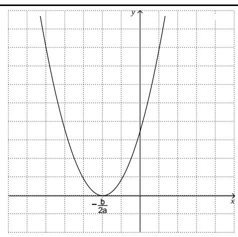
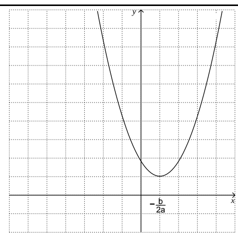
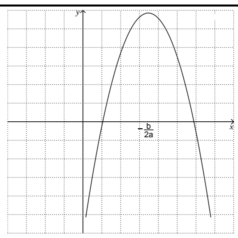
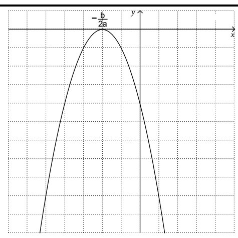
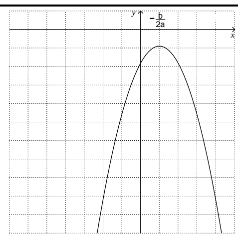
## 1.5 Interprétation graphique de la résolution d'une équation ou d'une inéquation du second degré

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère $C_f$ la courbe représentative de la fonction f : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

**Théorème 4** *La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.*
*Elle est tournée vers le "haut" si $a > 0$, tournée vers le "bas" si $a < 0$.*
*Son axe de symétrie est la droite d'équation : $x = -\frac{b}{2a}$*
*Le point $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ est son sommet.*

Démonstration :

Récapitulatif :

| | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| $C_f$ avec $a > 0$ tournée vers le "haut" |  |  |  |
| $C_f$ avec $a < 0$ tournée vers le "bas" |  |  |  |