Chapitre 2

Barycentre dans le plan

2.1 Barycentre de deux points pondérés

Définition 1 *On appelle barycentre de deux points pondérés* (A, α) *et* (B, β) *(avec* $\alpha + \beta \neq 0$*) le point* G *tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

On fixe $\alpha + \beta \neq 0$ pour toute la suite.
cas particuliers :

Si $\alpha = \beta$ alors G s'appelle l'isobarycentre dans le cas de deux points G est le mileu du segment $[AB]$.
Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ alors on a $\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $G = B$

2.2 Caratérisation du barycentre

Théorème 1
G est le barycentre des points (A, α) *et* (B, β) *si, et seulement si pour tout* M *du plan on a :* $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration : G est le barycentre des points (A, α) et (B, β) donc on a :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ on utilise la relation de Chasles
$\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0}$ d'où
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$ $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Théorème 2
G est le barycentre des points (A, α) *et* (B, β) *si, et seulement si* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{AB}$

Cette relation permet de construire le point G.
Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème 1 avec le point M=A.
Ce qui donne : $\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$ soit $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{AB}$

2.3 Propriétés du barycentre

Théorème 3
Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels (non nuls).

Démonstration : soit $k \in \mathbb{R}^*$ et le point G barycentre des deux points (A, α) et (B, β) (avec $\alpha + \beta \neq 0$), on a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ si on multiplie les deux membres de l'égalité par k on obtient :
$k \times \alpha\overrightarrow{GA} + k \times \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ donc G est le barycentre des deux points $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$
Application : Soit G le barycentre des points $(A, \frac{3}{4})$ et $(B, -\frac{1}{2})$, G est le barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, -2)$

Théorème 4
Le barycentre de deux points(A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, appartient à la droite (AB).

Le plan est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Théorème 5
Le barycentre de deux points(A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$.

2.4 Barycentre de 3 points et plus

Définition 2 *On appelle barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$) le point G tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Théorème 6
G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) si, et seulement si $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

Théorème 7
G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) si, et seulement si $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)}\overrightarrow{AC}$

Dans le Le plan est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Théorème 8
G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$.

Théorème 9 *Associativité :*
G est le barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$), on suppose de plus $(\alpha + \beta \neq 0)$
Si et seulement si G est le barycentre des deux points $(H, \alpha + \beta)$ et (C, γ) où H est le barycentre de (A, α) et (B, β).

Exemple : Soit ABC un triangle équilatèral et G le barycentre $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$