# Chapitre 3

# Généralités sur les fonctions

## 3.1 Fonctions

**Définition 1** *:*
*Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$.*
*Une fonction $f$ de $D$ vers $\mathbb{R}$ associe à tout élèment $x$ de $D$ un unique réel noté $f(x)$.*
*$f(x)$ est appelé l'image de $x$ par $f$*
*$x$ est des antécédants de $f(x)$*
*Dans le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe représentative de $f$, notée $C_f$, est l'ensemble des points $M$ de coordonées $(x; f(x))$*

**Exemples :** fonctions usuelles dites de référence.

| Nom | formule | ensemble de définition | Repésentation graphique |
|---|---|---|---|
| Fonctions affines | $x \longmapsto ax+b$ avec $a$ et $b \in \mathbb{R}$ | définies sur $\mathbb{R}$ | droites |
| Fonction carré | $x \longmapsto x^2$ | définie sur $\mathbb{R}$ | parabole |
| Fonction inverse | $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ | définie sur $\mathbb{R}^*$ | hyperbole |
| Fonctions circulaires | $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ | définies sur $\mathbb{R}$ | sinusoïdes |

**Exemple :** Déterminer un ensemble de définition
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.
$f$ n'est définie que pour les réels $x$ tels que $x+1 > 0$ d'où l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$ est $]-1; +\infty[$.

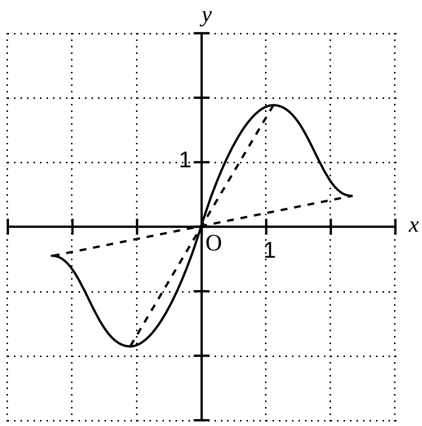
## 3.2 Parité et éléments de symétrie

**Définition 2** *:*
*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ symétrique par rapport à 0.*
*Dire que $f$ est* **paire** *(respectivement* **impaire***) signifie que pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).*

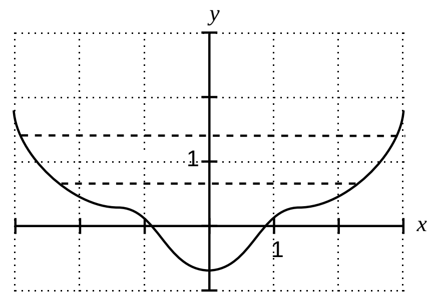
**Exemples :**
Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$ est paire.
Montrer que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire

**Remarque :** il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires.

**Propriété 1** *: Dans le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si une fonction $f$ est impaire alors sa courbe représentative $C_f$ admet le point $O$ comme centre de symétrie.*



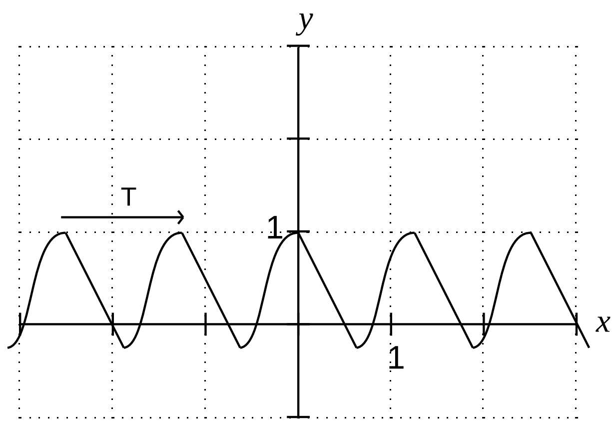

**Propriété 2** *: Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,*
*si une fonction $f$ est paire alors sa courbe représentative $C_f$ admet l'axe des ordonnées $(Oy)$ comme axe de symétrie.*




## 3.3 Périodicité

**Définition 3** *:*
*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $T$ un reél strictement positif.*
*Dire que $f$ est* **périodique** *de période $T$ signifie que pour tout $x \in I$ on a $f(x+T) = f(x)$.*

**Propriété 3** *: Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si une fonction $f$ est périodique de période $T$ alors sa courbe représentative $C_f$ est globalement invariante par translation de vecteur $kT\overrightarrow{i}$ où $k$ est entier relatif.*



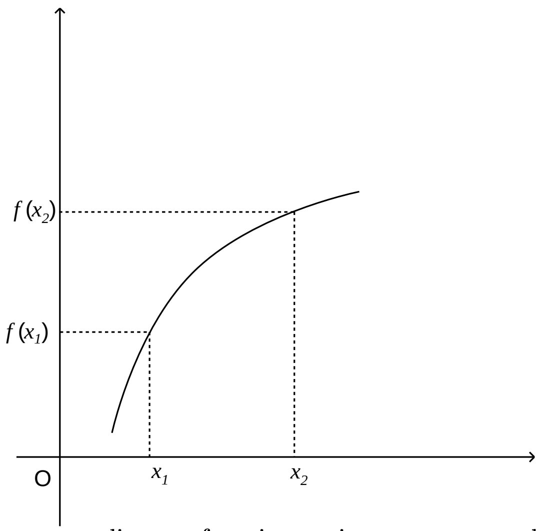
## 3.4 Sens de variation et extremun

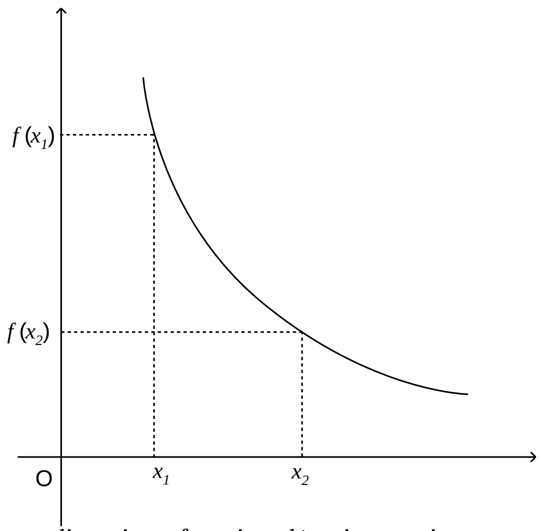
**Définition 4** *:*

*Une fonction $f$ est **strictement croissante** sur un intervalle $I$ inclus dans son ensemble de définition $D_f$ lorsque :*
*pour tout couple $(x_1; x_2)$ d'éléments de $I$, tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$*

*Une fonction $f$ est **strictement décroissante** sur un intervalle $I$ inclus dans son ensemble de définition $D_f$ lorsque :*
*pour tout couple $(x_1; x_2)$ d'éléments de $I$, tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_2) < f(x_1)$*

*On dit qu'un fonction est **monotone** sur un intervalle $I$ lorsque $f$ est soit croissante sur $I$ soit décroissante sur $I$.*




Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

**Définition 5** *Soit $f$ une fonction et $I$ un intervalle de $D_f$.*
*Dire que $f$ atteint un **maximun** en $x_0$ sur l'intervalle $I$ signifie que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.*
*Dire que $f$ atteint un **minimun** en $x_1$ sur l'intervalle $I$ signifie que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(x_1)$.*

**Exemple :** Soit la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 - (x-2)^2$. Montrer que $f$ admet un maximun sur $\mathbb{R}$.

## 3.5 Opérations et Comparaison de fonctions

**Comparaison**
Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine $D$. On a :
$f = g$ si, et seulement si, pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$
$f \leq g$ si, et seulement si, pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq g(x)$
$f \geq g$ si, et seulement si, pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq g(x)$

**Interprétation graphique :**
$f \leq g$ signifie que la courbe représentative $C_f$ est "en dessous" de la courbe représentative $C_g$
$f \geq g$ signifie que la courbe représentative $C_f$ est "au dessus" de la courbe représentative $C_g$

**Définition 6** *Une fonction $f$ est dite :*

***majorée*** *sur $I$ lorsqu'il existe un réel $M$ tel que pour tout $x \in I$ $f(x) \leq M$.*

***minorée*** *sur $I$ lorsqu'il existe un réel $m$ tel que pour tout $x \in I$ $f(x) \geq m$.*

***bornée*** *sur $I$ lorsqu'il existe des réels $M$ et $m$ tels que pour tout $x \in I$ $m \leq f(x) \leq M$.*

**Opérations**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions d'ensembles de définition respectifs $D_f$ et $D_g$.
On définit sur $D = D_f \cap D_g$ les fonctions :

$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$.

$kf : x \longmapsto k \times f(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$f \times g : x \longmapsto f(x) \times g(x)$

et pour tout $x$ de $D$, tel que $g(x) \neq 0$ : $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

**Sens de variation**

**Théorème 1**
*La somme de deux fonctions strictement croissantes (resp. décroissante) sur un intervalle $I$ est une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur $I$.*

**Théorème 2** *Soient $k$ un réel et $f$ une fonction.*
*Si $k > 0$, $f$ et $kf$ ont le même sens de variation.*
*Si $k < 0$, $f$ et$kf$ varient en sens contraires sur $I$.*

## 3.6 Composée de deux fonctions

Soit $f$ et $g$ deux fonctions, et $x$ un réel de $D_g$ Si $g(x) \in D_f$, on peut caculer $f(g(x))$.

**Définition 7**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions, la fonction $f \circ g$ ($f$ rond $g$) est la fonction définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

Le domaine de défintion de la fonction $f \circ g$ est $D = \{x \in D_g$ tels que $g(x) \in D_f\}$

**Exemple :** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ et a fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + 6$. La fonction $f \circ g$ est définie pour les réels $x$ tels que $g(x) \neq 3$ c'est-à-dire $x^2 - 5x + 6 - 3 \neq 0$ soit $\mathbb{R} - \{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\}$ et définie par $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 3}$.

**Théorème 3** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions strictement monotones et $I$ un intervalle sur lequel $f$, $g$ et $f \circ g$ sont définies.*

- *Si $f$ et $g$ ont le même sens de variation, alors $f \circ g$ est croissante sur $I$.*
- *Si $f$ et $g$ ont des sens de variation différents, alors $f \circ g$ est décroissante sur $I$.*