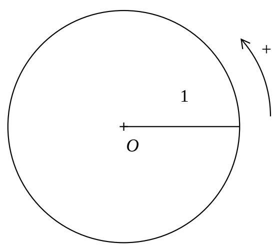
Chapitre 4

Angles orientés, repérage et rotation

4.1 Angles orientés

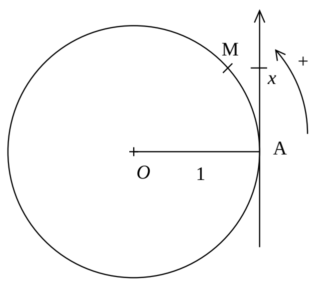
4.1.1 Cercle trigonométrique



Définition 1 *Une unité de longueur étant fixé, on appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O, de rayon 1 muni d'une origine A et d'un sens de parcours (sens direct).*

L'usage veut que le sens direct soit le sens inverse des aiguilles d'une montre.
L'usage est de choisir un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$ et on se déplace de A vers B dans le sens direct.

4.1.2 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique :



L'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique permet : d'associer à chaque réel α, un point M sur le cercle. inversement de repérer tout point M du cercle au moyen de réels x mesurant l'arc orienté AB

Exemple : Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et d'origne A. Placer les points B,C,D tels que : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{7\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \dfrac{21\pi}{5}$

4.1.3 Mesure principale

Soit un cercle trigonométrique d'origine A, tout point M du cercle peut être repéré par un réel α mesure de l'arc orienté AM. Ce réel α n'est pas unique, il existe une infinité de réels permettant de repéré M. En effet tout les réels $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ repérent le même point M.
on a donc $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 2 *On appelle mesure principale l'unique valeur α_0, parmi les réels $\alpha+2k\pi$, appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.*

Exemple : Donner les mesures principales des angles suivants
$\alpha_1 = \dfrac{21\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 5 \times 2 \times \pi$; $\alpha_2 = \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$

Angles orientés de deux vecteurs non-nuls quelconque :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls, il existe un unique couple de points $(M; N)$ du cercle $\mathcal{C}$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{u}}{||\overrightarrow{u}||} \quad et \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\vec{v}}{||\overrightarrow{v}||}.$$

Les points M et N appartiennent au cercle $\mathcal{C}$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ non-nuls définissent un angle orienté $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ dont un représentant est l'angle $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})$.
On a $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON})$.

4.1.4 Propriétés des angles orientés

On a donc $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{u}) = 0$ et $(-\overrightarrow{u}; \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}; -\overrightarrow{u}) = \pi$

Propriété 1
Deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de mêmes sens si, et seulement $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$.
Deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si, et seulement $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \pi$.

Propriété 2 *Relation de Chasles*
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ on a : $(\overrightarrow{u}; \vec{v}) + (\overrightarrow{v}; \vec{w}) = (\overrightarrow{u}; \vec{w})$

Conséquences :
Pour tous vecteurs non-nuls $\overrightarrow{u}$, $\vec{v}$ on a :
- $(\overrightarrow{v}; \vec{u}) = -(\overrightarrow{u}; \vec{v})$
- $(\overrightarrow{u}; -\vec{v}) = (\overrightarrow{u}; \vec{v}) + \pi$
- $(\overrightarrow{-u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{u}; \vec{v}) + \pi$
- $(\overrightarrow{-u}; \overrightarrow{-v}) = (\overrightarrow{u}; \vec{v})$

4.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs :

Si x désigne une mesure en radians d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, il existe un point M appartenant au cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OM}) = x$.

Définition 3 *Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ est (resp. le sinus) le cosinus de l'une de ces mesures en radians.*

Le point M a pour abscisse $cos(x)$ et pour ordonnée $sin(x)$.

4.2.1 Lignes trigonométriques associées :

1. $\begin{cases} cos(x+2\pi) = cos(x) \\ sin(x+2\pi) = sin(x) \end{cases}$
2. $\begin{cases} cos(-x) = cos(x) \\ sin(-x) = -sin(x) \end{cases}$
3. $\begin{cases} cos(\pi - x) = -cos(x) \\ sin(\pi - x) = -sin(x) \end{cases}$
4. $\begin{cases} cos(\pi + x) = -cos(x) \\ sin(\pi + x) = -sin(x) \end{cases}$
5. $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x) \end{cases}$
6. $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x) \end{cases}$

Sinus et Cosinus remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

4.2.2 Equations trigonométriques :

$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $a = -b + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$
Les solutions de cette équations représentés sur un cercle sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
$\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $a = \pi - b + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$
Les solutions de cette équations représentés sur un cercle sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4.3 Répérage. Coordonnées Polaires

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, tout point M distinct de O peut être repéré par :

- l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$
- et par la distance $r = OM$.

En effet le point M est l'intersection du cercle de centre O et de rayon r avec le demi-droite $[Oz)$.

Définition 4 *Pour tout point M distinct de l'origine O, un couple $(r;\theta)$ tel que $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$ est un couple de coordonées polaires de M. On note $M(r;\theta)$.*

Lien coordonées cartésiennes et coordonnées polaires :

Propriété 3 *Dans un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, un point M distinct de O ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ alors on a :*

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Exemple : $A(2;\dfrac{\pi}{4})$