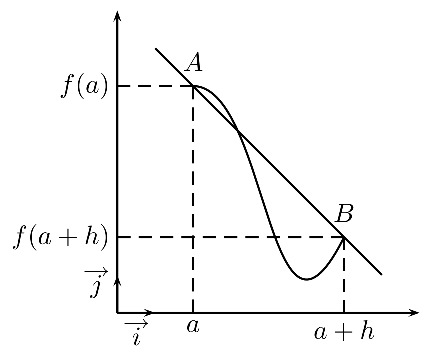
# Chapitre 5

# Dérivation

## 5.1 Nombre dérivé d'une fonction en point




**Définition 1** *$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ est un réel de $I$.*
*Dire que le réel $l$ est le nombre dérivé de $f$ en $a$ signifie que :*
*la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ a pour limite $l$ en zéro.*
*On dit alors que la fonction $f$ est dérivable en $a$.*

On note le nombre dérivé $l$ de la fonction $f$ en $a$, $f'(a)$.
La quantité $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelée **taux de variation**.

### Exemples :

- La fonction $f\ :\ x \longmapsto 2x+1$ est-elle dérivable en un réel $a$ ?
  Pour $h \neq 0$, on peut écrire :
  $g(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{2(a+h)+1-(2a+1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$
  la fonction $g$ admet 2 comme limite en zéro ; $f$ est donc dérivable en $a$, son nombre dérivé est 2.
- La fonction $f\ :\ x \longmapsto x^3-7$ est-elle dérivable en $a=2$ ?
  Pour $h \neq 0$, on peut écrire :
  $g(2) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3-7-(2^3-7)}{h} = \dfrac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12+6h+h^2$
  la fonction $g$ admet 12 comme limite en zéro ; $f$ est donc dérivable en $a=2$, et son nombre dérivé est $f'(2)=12$.

## 5.2 Intérprétation du nombre dérivé

### 5.2.1 interprétation graphique

Soit une fonction $f$ dérivable en $a$. On appelle $C_f$ sa représentation graphique. On désigne par $A$ et $M$ les points de $C_f$ d'abscisse respective $a$ et $a+h$. la droite $(AM)$ a pour coefficent directeur :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Quand $h$ tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers le nombre dérivé de $f$ en $a$.

**Théorème 1** *Si $f$ est une fonction dérivable en $a$, la représentation graphique de $f$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$*

**Propriété 1** *Equation de la tangente*
*Si $f$ est dérivable en $a$, alors une équation de la tangente en $M_a(a, f(a))$ à la courbe représentative de $f$ est :*

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

### 5.2.2 interprétation cinématique

Un mobile se déplace sur une trajectoire rectiligne entre un point $A$ et un point $B$.
A chaque instant $t$ on peut associer la distance $AM = d(t)$ qui sépare le mobile du point départ $A$.
On définit ainsi une fonction $d \,:\, t \longmapsto d(t) = AM$.
Le rapport $\dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ représente la vitesse *moyenne* du mobile entre les instants $t_0$ et $t_0 + h$.
Si la fonction $d$ est dérivable en $t_0$, la limite de $\dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ quand $h$ tend vers 0 est la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t_0$.

**Définition 2** *La vitesse instantanée d'un mobile à l'instant $t_0$ est le nombre dérivée en $t_0$ de la fonction horaire du mobile.*

### 5.2.3 Approximation affine :

## 5.3 Fonction dérivée

Si une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est dérivable en tout point de $I$ on dit que la fonction est dérivable sur $I$.
**Exemples :**
• Fonction carré $f \,:\, x \longmapsto x^2$.
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le nombre dérivé de $f$ en $x_0$ est $2x_0$ ; la fonction

$$\begin{aligned} f' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

est la fonction dérivée de $f$.
le nombre dérivé de $f$ en 3 est donc $f'(3) = 6$.
• Fonction affine $f \,:\, x \longmapsto mx + p$.
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le nombre dérivé de $f$ en $x_0$ est $m$ ; la fonction

$$\begin{aligned} f' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto m \end{aligned}$$

est la fonction dérivée de $f$.

## 5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

$u$ et $v$ sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$.

### 5.4.1 Addition et multiplication

Les fonctions $u + v$, $ku$ ($k \in \mathbb{R}$) et $uv$ sont dérivables sur $I$ et on a :
• $(u + v)' = u' + v'$

- $(uv)' = u'v + uv'$

**Dérivée de $u^n$ :**
Si $u = v$ on $(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$.
D'autre part $(u^3)' = (uu^2)' = u'(u^2) + u(2u'u) = 3u'u^2$.
Plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
En particulier si $u(x) = x$ on obtient :
la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1} = nx^{n-1}$

### 5.4.2 Division et inverse :

Si $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$,
et si $v$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ telle que pour tout $a \in I$ , $v(a) \neq 0$,
alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont des fonctions dérivables sur $I$ et on a :

- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Principe de la démonstration :**
Pour $h \neq 0$ et $a \in I$ on a :

$$\tau_a(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right]$$

$$\tau_a(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a+h)v(a)}\right]$$

$$\tau_a(h) = \overbrace{\frac{1}{h}\left[v(a) - v(a+h)\right]}^{\text{tend vers } -v'(a)} \times \overbrace{\frac{1}{v(a+h)v(a)}}^{\text{tend vers } \frac{1}{v(a)^2}}$$

$\tau_a(h)$ tend vers $-\frac{v'(a)}{v(a)}^2$ quand $h$ tend vers 0.

On en déduit que pour tout $a \in I$ le nombre dérivé de $\frac{1}{v}$ en $a$ est $-\frac{v'(a)}{v(a)}^2$.

### 5.4.3 Fonction composée :

**Théorème 2** *$u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.*
*$a$ et $b$ des réels et $a \neq 0$.*
*$J$ est l'intervalle, ensemble des réels $x$ tels que $ax + b \in I$.*
*la fonction $v$ $: \longmapsto u(ax+b)$ dérivable sur $J$ et pour tout réel $x_0$ de $J$ on a :*

$$v'(x_0) = au'(ax_0 + b).$$

| Fonction $f$ | Fonction $f'$ | Ensemble de définition de $f'$ |
|---|---|---|
| $x \longmapsto a$ | $x \longmapsto 0$ | $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto ax+b$ | $x \longmapsto a$ | $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ | $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ | $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ |
| $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $D_{f'} = ]0;+\infty[$ |
| $x \longmapsto \sin(x)$ | $x \longmapsto \cos(x)$ | $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \cos(x)$ | $x \longmapsto -\sin(x)$ | $D_{f'} = \mathbb{R}$ |