

Chapitre 6

Produit scalaire

6.1 Définition et conséquences

Définition 1

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple :

Avec $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(2; 3)$, on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 6 = 8$.

Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$, on notera parfois $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$
- Si l'un des deux vecteurs \vec{u} ou \vec{v} est nul alors le produit scalaire est nul. Cependant la réciproque est fautive $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement que \vec{u} ou \vec{v} soit le vecteur nul. Exemple : avec $\vec{i}(1; 0)$ et $\vec{j}(0; 1)$ on a $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et pourtant ni \vec{i} ni \vec{j} ne sont le vecteur nul.

Théorème 1 Lien avec la norme.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, on a l'égalité suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Démonstration :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

On a :

- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$
- $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$

d'où $\frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = xx' + yy' = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

La norme d'un vecteur étant indépendante du repère, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 2

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant du repère choisi.

On peut définir de plusieurs manières le produit scalaire, selon le contexte on utilisera l'une de ces expressions.

Théorème 3 Définitions équivalentes

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

$$2. \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v}' & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ avec } \vec{v}' \text{ le projeté orthogonal de } \vec{v} \text{ sur la direction donnée par } \vec{u} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration :

Supposons que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et posons $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

Soit \vec{j} le vecteur tel que : $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\| = 1$ ainsi le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est repère orthonormé direct.

Dans ce repère on a $\vec{u} = (\|\vec{u}\|; 0)$ et $\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos \theta; \|\vec{v}\| \sin \theta)$ avec $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ d'où :

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ce qui démontre (2).

Si on considère \vec{v}' le projeté orthogonal de \vec{v} sur la direction donnée par \vec{u} on a $\vec{v}' = (\|\vec{v}\| \cos \theta; 0)$ d'où :

$\vec{u} \cdot \vec{v}' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ce qui démontre (3).

6.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété 1 \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs et λ est un réel.

Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Linéarité : $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

Distributivité : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ on a aussi : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Justification :

En exprimant le produit scalaire dans une b.o.n, on démontre chacun des points de la propriété.

Exemple : Soient A, B et C trois points du plan, simplifier $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{BD} \\ & \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

Propriété 2 Identités remarquables :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstration : On a $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ on applique la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition et la commutativité du produit scalaire. On obtient : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

Propriété 3 Inégalités :

$$-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Théorème 4 orthogonalité

Deux vecteurs non-nuls sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

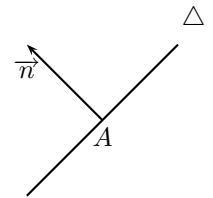
6.3 Applications du produit scalaire

6.3.1 Equation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on cherche à déterminer une équation de la droite Δ dont la direction est orthogonal au vecteur $\vec{n}(a; b)$ non-nul passant par le point $A(x_A; y_A)$.

$M(x; y)$ appartient à la droite Δ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ on a donc une équation de la droite Δ :

$$(x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0.$$



Application :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient les points $A(2; 1)$, $B(0; 1)$ et $C(1; 3)$.

Déterminer une équation de la droite d passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC)

On a $\overrightarrow{BC}(1; 2)$ et $M(x; y)$ appartient à la droite d si et seulement, si

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ (x - 2) + 2(y - 1) &= 0 \\ x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$x + 2y - 4 = 0$ est une équation de la droite d .

6.3.2 Equation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on cherche à déterminer une équation d'un cercle \mathcal{C} dans les deux cas suivants.

Défini par son centre et son rayon :

Soit le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon $r > 0$.

$M(x; y)$ appartient au cercle \mathcal{C} si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$

on a donc une équation du cercle \mathcal{C} :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

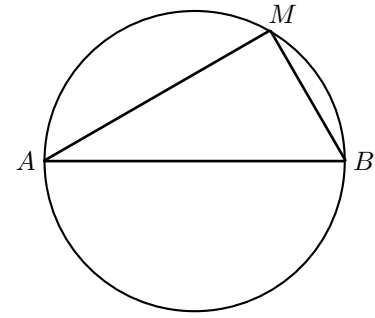
Défini par son diamètre :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan et \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$.

$M(x; y)$ appartient au cercle \mathcal{C} si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

on a donc une équation du cercle \mathcal{C} :

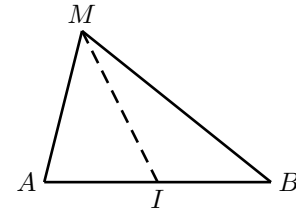
$$(x - x_A) \times (x - x_B) + (y - y_A) \times (y - y_B) = 0.$$



6.3.3 Théorème de la médiane

Théorème 5 Soient MAB un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ on a :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$



Démonstration :

1.

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ MA^2 - MB^2 &= 2MI^2 + IA^2 - IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \\ MA^2 - MB^2 &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \\ MA^2 - MB^2 &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ MA^2 + MB^2 &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \\ MA^2 + MB^2 &= 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \\ MA^2 + MB^2 &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= MI^2 - IA^2 \end{aligned}$$