Chapitre 9

Applications de la dérivation

9.1 Lien entre la dérivation et sens de variation d'une fonction

Dans le chapitre 5, on a vu que la dérivation est utile dans la recherche d'une tangente à la courbe. Nous allons voir qu'elle est aussi utile dans la recherche du sens de variation d'une fonction.

Théorème 1
Si une fonction f est dérivable et monotone sur l'intervalle I alors sa dérivée est de signe constant sur I.
• *Si f est dérivable et croissante sur I alors f' est positive ou nulle sur I.*
• *Si f est dérivable et décroissante sur I alors f' est négative ou nulle sur I.*

Justification :
Supposons que f soit une fonction dérivable et croissante sur l' intervalle I. La fonction f étant croissante sur I, pour tous les réels distincts a et $a+h$ de I, les réels h et $f(a+h)-f(a)$ sont de même signe donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
$f'(a)$ est la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Etant donné que le réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ positif est ausssi proche que l'on veut de $f'(a)$, on conçoit et l'on admet que $f'(a) \geq 0$. Ainsi, si f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I alors pour tout réel a de I, $f'(a) \geq 0$.
Même raisonnement pour f une fonction dérivable et décroissante sur l'intervalle I.
On s'intéresse à la réciproque, et nous admettons le résultat suivant :

Théorème 2
Si une fonction f est dérivable et monotone sur l'intervalle I alors sa dérivée est de signe constant sur I.
• *Si f' est strictement positive sur I sauf en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*
• *Si f' est strictement négative sur I sauf en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est scritement décroissante sur I.*

Exercice Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
La fonction f est une fraction rationnelle, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

On étudie le signe de x^2-2x-1. Puisque $(x-1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$, la fonction dérivée f' est du signe de x^2-2x-1.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	$2-2\sqrt{2}$	↘	‖	↘	$2+2\sqrt{2}$	↗	

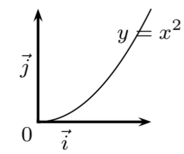
9.2 Extremum d'une fonction

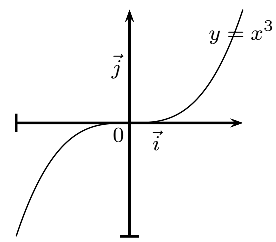
Théorème 3

f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I.
Si f admet un extremum en un réel x_0 de I, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

- Il est indispensable que l'intervalle I soit un ouvert. Considérons par exemple la fonction $f \,:\, x \longmapsto x^2$ sur $I = [0;1]$,
$f(1) = 1$ est le maximum de la fonction f sur I et pourtant $f'(1) = 2 \neq 0$.





- La réciproque est fausse. Si $f'(x_0) = 0$, la fonction f n'admet pas nécessairement un extremum en x_0. Considérons par exemple la fonction $f \,:\, x \longmapsto x^3$ sur $I =]-1;1[$, on a $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum de f.

La réciproque du théorème 2 est fausse mais lorsque le tableau de variation d'une fonction est de l'un des types suivants, on peut conclure que $f(x_0)$ est un extremum de f.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f(x_0)$	↗	

$f(x_0)$ est un minimum de f.
On remarque que f' s'annule en changeant de signe en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$f(x_0)$	↘	

$f(x_0)$ est un maximum de f.
On remarque que f' s'annule en changeant de signe en x_0.

On admet le théorème suivant :

Théorème 4

f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I.
Si f' sannule en x_0 de I en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.