Chapitre 7

Limite d'une fonction

7.1 Limite d'une fonction en a

7.1.1 Limite finie en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I ou une borne de I.

Définition 1
Si lorsque le réel x s'approche de a le réel $f(x)$ s'approche d'un réel l, on dit que f à pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Exemple : Soit la fonction $f\ :\ x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $I = [0;1]$.
La fonction f admet-elle une limite en 0 ?
Dès que $0 \leq x \leq 10^{-2n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sqrt{x} \leq 10^{-n}$. On en déduit que lorsque x tend vers 0, $\sqrt{x}$ tend aussi vers 0. La fonction f admet donc une limite en 0 qui vaut 0. On note $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

Remarque : certainnes fonctions n'admettent pas de limite en a.
Exemple : la fonction $x \longmapsto \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0.
On admet le théorème suivant

Théorème 1 *Limites usuelles*

- *Pour* $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- P *un polynôme,* a *un réel,* $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- $Q = \dfrac{N}{D}$ *une fraction rationnelle, pour* $a \in D_f$, $\lim\limits_{x \to a} Q(x) = Q(a) = \dfrac{N(a)}{D(a)}$.
- *Pour* a *un réel,* $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$

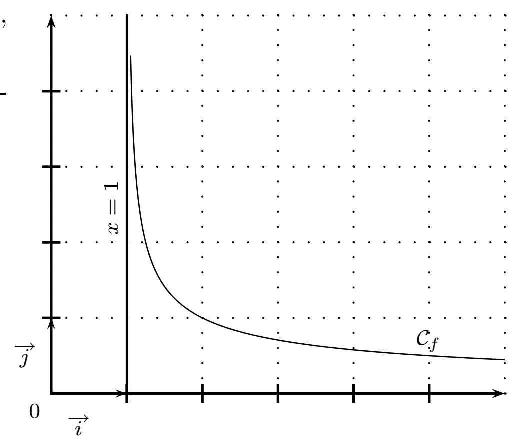
7.1.2 Limite infinie en a et asymptote verticale

Définition 2
Si lorsque le réel x s'approche de a

- *le réel $f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.*
- *le réel $-f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.*

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

Exemple : Soit $f \; : \; x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ définie sur $]1, +\infty[$, dont on a tracé la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Etudions la limite de f en 0, graphiquement on peut conjecturer : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
Pour x suffisament proche de 1, $f(x)$ finit-il par être supérieur à n'importe quel réel M ?
Etant donné un réel M strictement positif,
Si $1 \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{M^2}$
$0 \leq x - 1 \leq \dfrac{1}{M^2}$
$0 \leq \sqrt{x-1} \leq \dfrac{1}{M}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \geq M$
alors $f(x) \geq M$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.



7.2 Limite d'une fonction en ∞ et asymptote horizontale

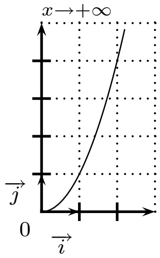
7.2.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Définition 3 *Soit f définie (au moins) sur $[a; +\infty[$.*
Si lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$

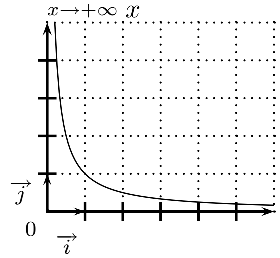
- *le réel $f(x)$ s'approche d'un réel l, on dit que f à pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.*
  On dit alors que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- *le réel $f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
- *le réel $-f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.*

Exemples :

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$



On dit alors que l'axe des abscisses (c'est-à dire la droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Remarque : certainnes fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$.
Par exemple : les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$

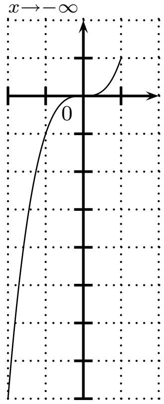
7.2.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 4 *Soit f définie (au moins) sur $]-\infty; a]$.*
Si lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues et négatives vers $-\infty$

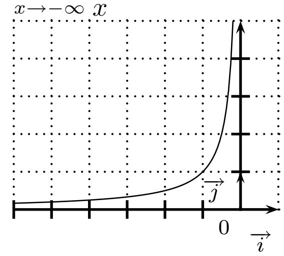
- *le réel $f(x)$ s'approche d'un réel l, on dit que f à pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$*
- *le réel $f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.*
- *le réel $-f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f à pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.*

Exemples :

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



7.3 Opérations sur les limites

On considère deux fonctions f et g, admettant des limites soit en $-\infty$, soit en $+\infty$, soit en un réel a.

Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas $\lim f = -\infty$ et $\lim g = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $f+g$, il s'agit d'une forme indéterminée.

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas $\lim f = 0$ et $\lim g = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $f \times g$, il s'agit d'une forme indéterminée.

Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$
$\lim(\frac{f}{g})$	$\frac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas suivants :
$\lim f = \pm\infty$ et $\lim g = \pm\infty$;
$\lim f = 0$ et $\lim g = 0$;
on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\frac{f}{g}$, il s'agit de formes indéterminées.

7.4 Fractions rationnelles