Chapitre 9

Suites numériques

9.1 Notion de suite

Une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

Rang du terme	1	2	3	4
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Terme	3	9	27	81

Définition 1
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} U: \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \longmapsto U_n \end{aligned}$$

L'image de l'entier n par la suite U se note U_n au lieu de $U(n)$. U_n se lit « U indice n ». On dit que U_n est le terme de rang n. la suite U se note aussi (U_n).
Remarques

- Si on définit la suite (U_n), Le terme suivant U_n est U_{n+1}, le terme précédant U_n est U_{n-1}

9.2 Sens de variation

Définition 2 *Soit (U_n) une suite numérique on dit que :*

- *la suite (U_n) est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$;*
- *la suite (U_n) est décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$;*
- *la suite (U_n) est stationnaire ou constante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.*

On définit de même une suite croissante, décroissante ou stationnaire à partir d'un certain rang n_0 en utilisant les inégalités suivantes :
pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$ on a $U_{n+1} \geq U_n$;
pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$ on a $U_{n+1} \leq U_n$;
pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$ on a $U_{n+1} = U_n$.

Remarque : il existe des suites ni croissantes ni décroissantes.
La suite U définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = (-1)^n$. On a $U_0 = 1$; $U_1 = -1$; $U_2 = 1$ et $U_3 = -1$.

Le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constant donc la suite U n'est ni croissante ni décroissante.

Méthodes : Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) on pourra :

- étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$;
- lorsque pour tout $n \in N$ (ou à partir d'un certain rang n_0) U_n est non-nul et de signe constant on peut comparer le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 ;
- si pour tout $n \in N$ on a $U_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur $[0; +\infty[$, lorsque f est une fonction monotone la suite U et la fonction f ont la même monotonie.

9.3 Suites arithmétiques

9.3.1 Notion de suite arithmétique

Définition 3
• *Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent toujours le même réel, appelé raison, la suite est une suite arithmétique.*
• *U est une suite arithmétique de raison r, signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$), on a :*

$$U_{n+1} = U_n + r.$$

La relation entre U_{n+1} et U_n est appelée relation de récurrence.
Exemples

- 5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de quatre termes, de premier terme 5 et de raison 3.
- 12 ; 10,5 ; 9 ; 7,5 ; 6 est une suite arithmétique de cinq termes, de premier terme 12 et de raison -1,5.

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence $U_{n+1} - U_n$ est un réel r constant.
Les suites (U_n) suivantes sont-elles arithmétiques ?
a) $U_n = 3n + 1$ b) $U_n = n^2 + 1$

a) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 11$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3n + 1$ et $U_{n+1} = 3(n + 1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$
d'où $U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - (3n + 1) = 3$.
La suite (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 3.

b) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$.
La différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constante en effet, $U_1 - U_0 = 1$ et $U_2 - U_1 = 3$.
La suite (U_n) n'est donc pas une suite arithmétique.

9.3.2 Calcul du terme de rang n

Considérons la suite arithmétique u de premier terme $u_1 = 5$ et de raison de -3.

$$\begin{aligned}
&u_2 = u_1 + r = 5 - 3 = 2\\
&u_3 = u_2 + r = (u_1 + r) + r = u_1 + 2r = 2 - 3 = -1\\
&u_4 = u_3 + r = (u_1 + 2r) + r = u_1 + 3r = -1 - 2 = -3
\end{aligned}$$

On admet que pour tout entier n non nul, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Théorème 1 *Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est :*

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est : $U_n = U_0 + nr$.

Exemple : soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 12$ et de raison 3.
Le terme de rang 50 $U_{50} = U_1 + (50-1) \times r = 12 + 49 \times 3 = 159$.

9.3.3 Somme des n premiers termes

Théorème 2 *La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 est :*

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

Exemple : soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)(n)}{2} = n^2$$

$S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 3 = 4$; $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$; $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$;

Justification :

9.4 Suites géométriques

9.4.1 Notion de suite géométrique

Définition 4
• *Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en multipliant le terme précédent par le même réel, appelé raison, la suite est une suite géométrique.*
• *Si U est une suite géométrique de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$). on a : $U_{n+1} = qU_n$*

Exemples :
1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; est une suite géométrique de cinq termes de premier terme 1 et de raison 2.
Les intérêts composés : un capital de 5000 € est placé au taux annuel de 4,5 %. On a donc :

$$
\begin{aligned}
&C_0 = 5000\\
&C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5225\\
&C_2 = C_1 \times 1,045 = 5355,625
\end{aligned}
$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique il faut :
• s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$
• montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel q constant.

9.4.2 Calcul du terme de rang n

Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a : $U_2 = q \times U_1$; $U_3 = q \times U_2 = q \times q \times U_1 = q^2U_1$; $U_4 = q \times U_3 = q \times q^2U_1 = q^3U_1$. On admet que pour tout entier n non nul, on a : $U_n = q^{n-1}U_1$.

Théorème 3 *Le terme de rang n d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison q est : $U_n = q^{n-1}U_1$. si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est $U_n = q^nU_0$.*

Exemple : Soit U une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 3. $U_{10} = 3^9 \times 100 = 1968300$

9.4.3 Somme des n premiers termes

Théorème 4 *Cas particulier*
La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = 1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. On a donc

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 + qU_1 + q^2U_1 \ldots + q^{n-1}U_1 = U_1(1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1})$$

d'où

Théorème 5 *Cas général*
La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

9.5 Convergence d'une suite

On considère un réel l et une suite numérique (U_n), et on s'interéresse au comportement de la suite en $+\infty$.

Définition 5 *Dire que la suite numérique (U_n)* ***converge vers le réel*** *l signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On dit alors que l est la limite de la suite (U_n) et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Remarques :
La limite d'une suite numérique convergente est unique.
Si une suite ne converge pas elle est dite divergente.
Si la suite U de la forme $U_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, les théorèmes sur les limites des fonctions en $+\infty$ s'appliquent.

Exemple : La suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0.
Tout intervalle ouvert $]a; b[$ a et $b \in \mathbb{R}^*$ avec $a < b$, contenant 0 contient tous les termes de la suite (U_n). à partir du rang $n_0 = E(max(\dfrac{1}{|a|}, \dfrac{1}{|b|})) + 1$ ou E désigne la fonction partie entière.

Théorème 6 *Opérations et limites*
(U_n) est une suite convergente vers le réel a et (V_n) est une suite convergente vers le réel b.
- *La suite (W_n), définie par $W_n = U_n + V_n$, converge vers le réel $a + b$.*
- *La suite (T_n), définie par $T_n = U_n \times V_n$, converge vers le réel $a \times b$.*
- *Si de plus (V_n) est une suite qui converge vers le réel $b \neq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \neq 0$, alors la suite (Q_n) définie par $Q_n = \dfrac{U_n}{V_n}$ converge vers le réel $\dfrac{a}{b}$.*

Exemple : La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$, converge vers 2. En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$ donc d'après le théorème sur la limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

Théorème 7 *d'encadremment dit « des gendarmes »*
Soient trois suites (U_n), (V_n) et (W_n) telles qu'il existe d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq p$ on ait $W_n \leq U_n \leq V_n$.
Si (V_n) et (W_n) convergent vers le même réel l, alors (U_n) converge vers l.

Justification : Soit I un intervalle ouvert contenant l. La suite (W_n) converge vers l.
Il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les termes $W_n \in I$.
De même pour la suite (V_n) il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes $V_n \in I$.
On a donc pour n tel que $N \geq max(n_0, n_1, p)$ tous les V_n et tous les termes W_n sont dans l'intervalle I , or pour tout $n \geq N \geq p$ on a $W_n \leq U_n \leq V_n$ d'où à partir du rang N tous les termes $U_n \in I$.
D'après la définition de la convergence d'une suite on peut dire que (U_n) converge vers l.

Théorème 8 *Limite d'une suite géométrique*
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme 1, pour tout $n \in N$ $U_n = q^n$.
- *Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$*
- *Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$*
- *Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ on dit alors que la suite diverge vers $+\infty$*