Chapitre 11

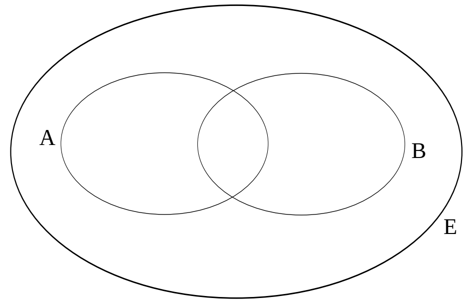
Probabilités sur les ensembles finis

11.1 Langage des événements

- **Expérience aléatoire :** expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue.
  Ex : un lancé de dé.
- **Univers :** ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note Ω.
  Dans notre exemple l'univers est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Eventualité :** chaque élément de l'univers.
  Ex : obtenir un "3".
- **Evénement :** sous-ensemble de l'univers Ω.
  Ex : $A = \{$ *obtenir un chiffre impair* $\}$.
- **Evénement élémentaire :** événement possédant un unique élément.
  Ex : $B = \{$ *obtenir le chiffre 6* $\}$.
- **Evénement certain :** Ω est appelé l'événement certain.
- **Evénement impossible :** $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.
- **Cardinal d'un ensemble :** nombre d'élément(s) de cet ensemble. On note $Card(A)$.
  Ex : $Card(A) = 3$.
- **Union :** l'événement A ou B se note $A \cup B$, est l'ensemble des événements de Ω appartenant à A ou B.
  Ex : $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.
- **Intersection :**l'événement A et C se note $A \cap C$, est l'ensemble des événements de Ω appartenant à A et C.
  Ex : $C = \{$ *obtenir un chiffre inférieur à 3* $\}$
  $A \cap C = \{1, 3\}$.
- **Evénements incompatibles :** Des événements A,B sont **disjoints**, ou **incompatibles**, signifie que $A \cap B = \emptyset$.
  Dans notre exemple : $A \cap B = \emptyset$.
  Ex : $A = \{$ obtenir un chiffre impair $\}$ et $D = \{$ obtenir un 2 ou un 4 $\}$
  Les événements A et D n'ont aucune éventualité commune.
- **Evénements contraires :** L'événement **contraire** d'un événement A est l'ensemble $\overline{A}$ des événements de Ω n'appartenant pas à A
  Ex : $E = \{$ obtenir un chiffre un nombre inférieur ou égale à 4 $\}$ et $\overline{E} = \{$ 5obtenir un 5 ou un 6 $\}$
  remarque : les événements E et $\overline{E}$ sont toujours incompatibles.

Représentation des évenements

Diagrammes ou patates



On considère les événements :
$A = \{$ obtenir un chiffre impair $\}$
$B = \{$ obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3 $\}$

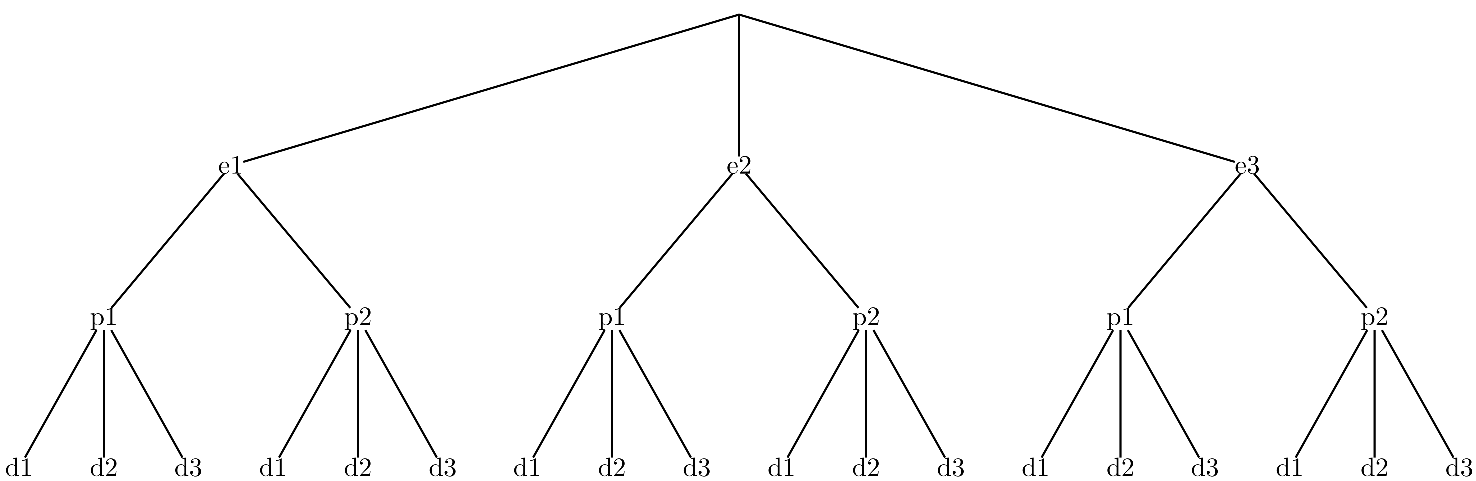
Tableaux

On tire dans un sac des jetons numérotés sur une face de 1 à 3 et sur l'autre a ou b. les différentes éventualités sont représentés dans le tableau suivant :

$E \times F$	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

Arbres

Au restaurant scolaire, on compose un menu par le choix d'une entrée e parmi l'ensemble E des 3 entrées, puis d'un plat p parmi l'ensemble P des 2 plats et enfin d'un dessert d parmi l'ensemble D des 3 desserts.
Un menu entrée+plat+dessert est un triplet (ou 3-uplet) du produit cartésien $E \times P \times D$, on peut composer
Card $(E \times P \times D) =$ Card $(E) \times$ Card $(P) \times$ Card $(D) = 2 \times 3 \times 3 = 18$ menus différents.



11.2 Loi de probabilités

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers fini.

Définition 1 *On appelle probalité toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant les axiomes suivants :*

Axiome 1 : $P(\Omega) = 1$

Axiome 2 : *Pour tous événements A et B, si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

11.2.1 Propriétés des probabilités

Des axiomes, on déduit les propriétés suivantes :

Propriété 1 *Pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.*

En effet $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$ les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, on a d'après l'Axiome 2 :
$P(A \cup \overline{A}) = 1$
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Dans le partculier où $A = \Omega$ on obtient $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$

Propriété 2 *Pour tous événements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a :*

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition 2 *L'équiprobalité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Dans le cas d'un lancé de dé équilibré, les événements élémentaires sont 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

Propriété 3 *Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A, est :*

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

Pour utiliser cette formule, il faut déterminer le nombre de cas favorables. C'est ce qu l'on appelle dénombrer.

Exercice : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Calculer la probabilité des événements suivants :

- $A = \{\text{tirer un as}\}$. $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$
- $B = \{\text{tirer une carte rouge}\}$. $P(B) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$
- $C = \{\text{tirer un as ou une carte rouge}\}$.
  $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, l'événement $A \cap B$ est "tirer un as rouge" on a $P(A \cap B) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$.
  d'où $P(C) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{9}{16}$
- $D = \{\text{ne tirer ni un as ni une carte rouge}\}$. $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \dfrac{7}{16}$