Chapitre 11

Vecteurs et repérage de l'espace

11.1 Vecteurs de l'espace

11.1.1 Du plan à l'espace :

On généralise la notion de vecteur vue dans le plan à l'espace. Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Définition 1 *Un vecteur $\vec{u}$ non nul dont l'un des représentants est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se caratérise par :*

- *sa direction : la droite (AB) ;*
- *son sens : de A vers B ;*
- *sa norme : la distance AB, $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$*

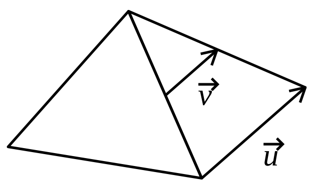
Propriété 1 *Soit O un point et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de l'espace, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.*

11.1.2 Vecteurs colinéaires

Définition 2 *Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires signifie que :*

- *les vecteurs ont même direction ;*
- *par convention le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$.*

On admet le résultat suivant :



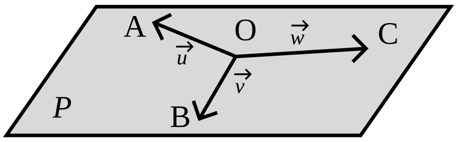
Théorème 1 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.*
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.

Tout comme dans le plan on a :

Théorème 2 *Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Propriété 2 *Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace.*
L'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

11.2 Vecteurs coplanaires



Définition 3 *Soit O un point de l'espace. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires signifie le point O et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ sont coplanaires.*

on admet le théorème suivant :

Théorème 3 *Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.*

Définition 4 *Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.*
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ du plan $\mathscr{P}$ signifie qu'il existe trois points A, B et C non alignés du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

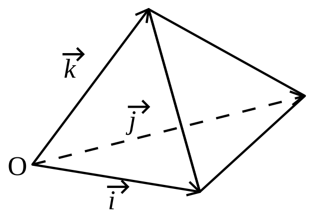
Propriété 3 *Soit A un point, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.*
L'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe deux réels α et β tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$ est le plan passant par A et de base $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$.

11.3 Repérage dans l'espace

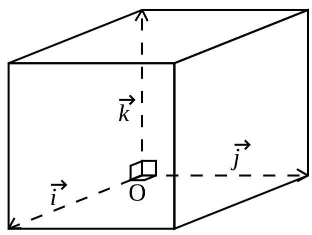
11.3.1 Repère de l'espace

Définition 5 *On appelle repère de l'espace tout quadruplet $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ constitué d'un point O de l'espace et de trois vecteurs non coplanaires.*

La droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ est l'axe des abscisses (Ox).
La droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ est l'axe des ordonnées (Oy).
La droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ est l'axe des côtes (Oz).
Lorsque les droites (Ox), (Oy) et (Oz) sont perpendiculaires deux à deux, le repère $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est dit orthogonal. Si de plus $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$, le repère $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est dit orthonormal.



$(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace.



$(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

11.3.2 Coordonnées

Soit $(O;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.

Théorème 4 *Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.*
On dit alors que le point M a pour coordonnées $(x;y;z)$ et l'on note $M(x;y;z)$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ il existe un unique point $M(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$, on définie donc : alors les coordonées du . Les coordonneés vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M.

Théorème 5 *Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{u} + z\overrightarrow{u}$.*

Théorème 6 *Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. On a :*

- *le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;*
- *le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}; \dfrac{z_B + z_A}{2})$;*
- *si, de plus, le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est orthonormal, on a $||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.*

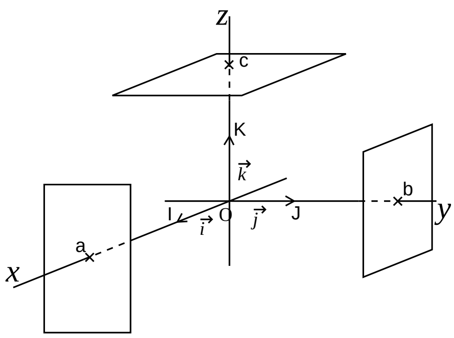
11.4 Equations cartésiennes de quelques surfaces

Définition 6 *On appelle équation cartésienne d'un ensemble $\mathscr{S}$ de points de l'espace une relation vérifiée par les coordonnées $(x; y; z)$ de tous les points de $\mathscr{S}$ et seulement par ceux-cii.*
$M(x; y; z) \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, le triplet $(x; y; z)$ vérifie la relation.

11.4.1 Equation cartésienne d'un plan parallèle aux plans de coordonnées

Propriété 4 • *Une équation cartésienne d'un plan parallèle au plan (OIJ) est $z = c$, avec c un réel.*

- *Une équation cartésienne d'un plan parallèle au plan (OIK) est $y = b$, avec b un réel.*
- *Une équation cartésienne d'un plan parallèle au plan (OJK) est $x = a$, avec a un réel.*



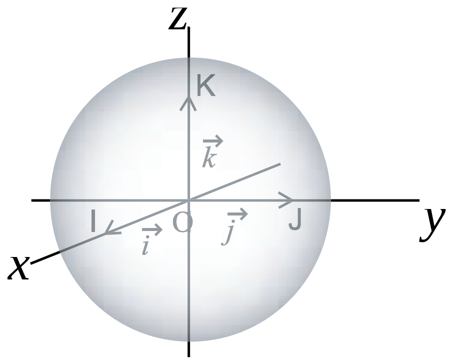
11.4.2 Equation cartésienne d'une sphère

on considère $\mathscr{E}$ un espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.

Propriété 5 *Soit R un réel strictement positif et $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ un point de l'espace. Une équation de la sphère de centre I et de rayon R est :*

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

.



$\mathscr{S} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$