# Chapitre 13

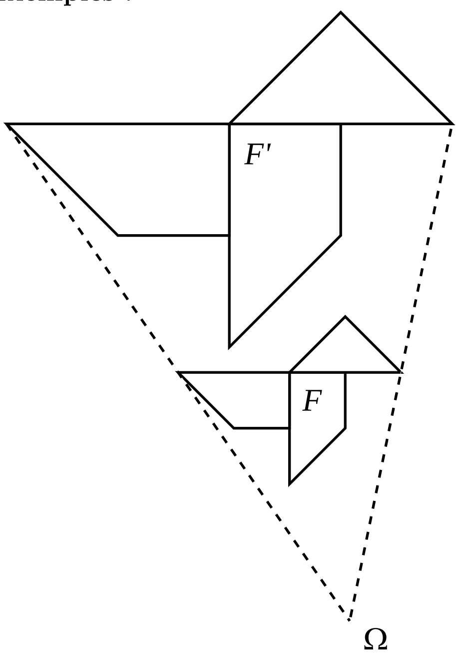
# Homothéties dans le plan

## 13.1 Généralités

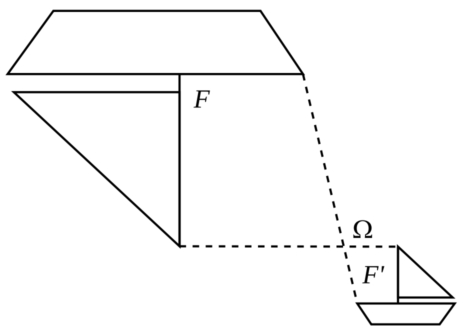
### 13.1.1 Définition, exemple

**Définition 1** *Soit $\Omega$ un point du plan et $k$ un réel non nul.*
*On appelle homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ l'application $h$ du plan dans le plan qui, à tout point $M$ du plan associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M'}$.*

**Exemples :**




Une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport 2.




Une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

**Théorème 1** *Soit $h$ une homothétie de rapport $k \neq 0$ et de centre $\Omega$. Si $M'$ est l'image de $M$ par l'homothétie $h$ alors les $M'$,$M$ et $\Omega$ sont alignés.*

**Justification et remarque :** d'après la définition, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires, les points $M'$, $M$ et $\Omega$ sont alignés. Ce théorème permet de "localiser" le centre de l'homothétie connaissant deux points distincts et leurs images.

### Cas particuliers :

- $k = 1$ : pour tout point $M$ du plan, $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ d'où les points $M'$ et $M$ sont confondus.
  **Une homothétie de rapport $1$ est l'application identité.**
- $k = -1$ : pour tout point $M$ du plan, $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ d'où $\Omega$ est le milieu de $[M'M]$.
  **Une homothétie de rapport $-1$ est la symétrie centrale de centre $\Omega$.**

### Point(s) invariant(s) :

Soit $h$ une homothétie de rapport $k \neq 0$ et de centre $\Omega$. Si $A$ est un point invariant par $h$, alors $h(A) = A$, d'où $\overrightarrow{\Omega A} = k\overrightarrow{\Omega A}$ soit $(1-k)\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{0}$ donc si $k \neq 1$ alors $A$ et $\Omega$ sont confondus.
**Une homothétie différente de l'identité admet un unique point invariant : son centre**
Remarque : une homothétie qui admet deux points distincts invariants est l'identité.

## 13.1.2 Propriété fondamentale

**Théorème 2** *L'image d'un bipoint $(M, N)$ par une homothétie de rapport $k$ est un bipoint $(M', N')$ tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

**Conséquences :** Une homothétie :

- transforme une droite en une droite ;
- multiplie les distances par $|k|$ ;
- transforme un triangle en un triangle semblable.

**Propriété 1** *de conservation. Une homothétie $h$ de rapport $k \neq 0$ conserve*

- *l'alignement ;*
- *les angles ;*
- *le barycentre (en particulier le milieu).*

**Propriété 2** *images de figures usuelles. Une homothétie $h$ de rapport $k \neq 0$ transforme*

- *une droite en une droite parallèle ;*
- *un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ parallèle tel que $M'N' = |k|MN$ ;*
- *un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de rayon $R$ est un cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $|k| \times R$ ;*
- *un triangle en un triangle de même nature.*