Exercice 1

Partie A

1. f est une fonction trinôme f,

On a $a = -1 < 0$ et $b = 6$ on calcule $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{-2} = 3$ et $f(3) = 6 \times 3 - 3^2 = 9$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$

2. $\mathscr{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$ et de sommet $S(3; 9)$.
La fonction g est affine, $\mathscr{C}_g$ est donc une droite.

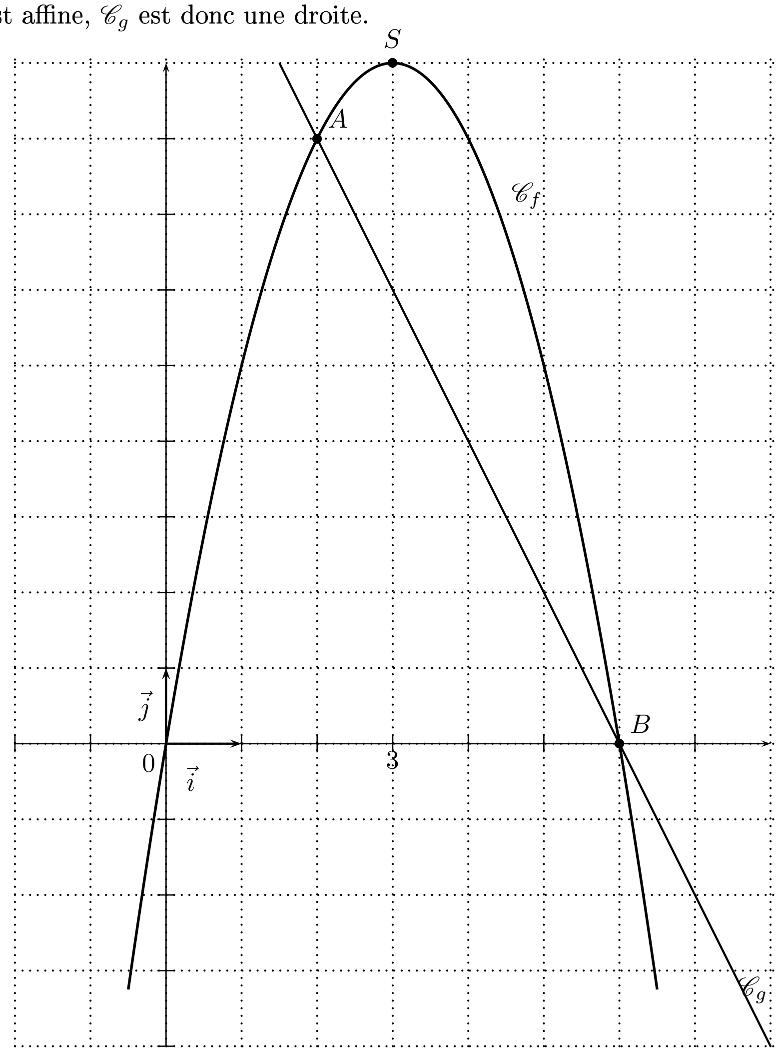

Fig. 1 – Exercice 1

3.

$$\begin{aligned}
&f(x) \geq g(x)\\
&6x - x^2 \geq 12 - 2x\\
&0 \geq 12 - 8x + x^2\\
&12 - 8x + x^2 \leq 0\\
&x^2 - 8x + 12 \leq 0
\end{aligned}$$

Les racines du trinôme $x^2 - 8x + 12$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$.
Il est négatif ou nul "entre ses racines" donc $S = [2; 6]$.

On calcule les ordonnées $y_1 = g(2) = 12 - 2 \times 2 = 8$ et $y_2 = g(6) = 12 - 2 \times 6 = 0$
Les positions relatives des courbes :

- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in]2; 6[$
- $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in]-\infty; 2[\cup]6; +\infty[$
- Les courbes ont deux points d'intersection $A(2; 8)$ et $B(6, 0)$.

Partie B

1. M décrit le segment $[AD]$ et $AD = 4$ donc x décrit $[0; 4]$.
2. Le triangle BCH est un triangle rectangle isocèle.
   En effet $CH = AD = 4$ et $BH = AB - CD = 6 - 2 = 4$
   On a donc $(CH) \perp (BH)$ et $CH = BH$.
3. Les triangles BHC et BPN ont deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables. BPN est un triangle rectangle isocèle donc $PB = PN = x$.
4. L'aire du rectangle $\mathscr{A}_{AMNP} = AM \times AP = x(6 - x)$
5. L'aire du trapèze $\mathscr{A}_{ABCD} = \dfrac{(2 + 6) \times 4}{2} = 16$.
   Pour calculer l'aire du triangle BCM on soustrait l'aire des deux triangles rectangles MDC et MAB à l'aire du trapèze $ABCD$.
   $\mathscr{A}_{BCM} = 16 - (\dfrac{2 \times (4 - x)}{2} + \dfrac{6 \times x}{2}) = 16 - 4 + x - 3x = 12 - 2x$

Partie C

1. Pour $x \in [0, 4]$ on a $\mathscr{A}_{AMNP} = x(6 - x) = 6x - x^2 = f(x)$, l'aire est maximale lorsque la fonction f atteint son maximum, pour $x = 3$, qui vaut 9
   On a $AM = 3$ et $AP = 6 - 3 = 3$ donc $AM = AP = MN = MP = 3$. Le rectangle $AMNP$ est dans ce cas un carré.
2. $\mathscr{A}_{AMNP} = \mathscr{A}_{BCM}$ si et seulement si
   $\left\{\begin{array}{l} x \ \in [0; 4] \\ x(6 - x) = 12 - 2x \end{array}\right.$
   c'est-à-dire $x = 2$ d'après la partie A.
   En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles MDC, MAB et CHB rectangles respectivement en D, A et H on a $BC = \sqrt{32}$, $CM = \sqrt{8}$ et $MB = \sqrt{40}$.
   On calcule $MB^2 = 40$ et $BC^2 + CM^2 = 32 + 8 = 40$
   On a $MB^2 = BC^2 + CM^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCM est rectangle en C.
3. On exploite la question 3 de la partie A.
   $\mathscr{A}_{AMNP} \geq \mathscr{A}_{BCM}$ est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} x \ \in [0; 4] \\ x(6 - x) \geq 12 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ \in [0; 4] \\ f(x) \geq g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [2, 6] \cap [0, 4] = [2, 4]$

EXERCICE 2

1. L est le barycentre de $(A,1)$ et $(D,3)$ donc $\overrightarrow{AL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ de même on a $\overrightarrow{CK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

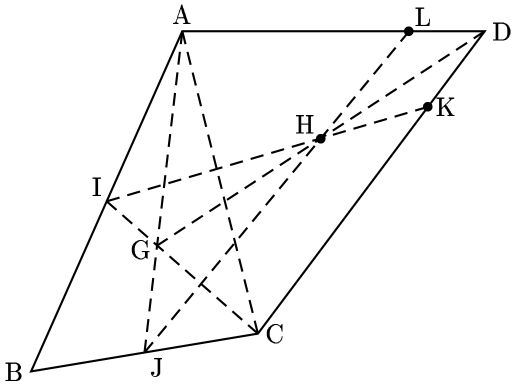

FIG. 2 – Exercice 2

2. On sait que :
H est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(D,3)$.
G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$
d'après l'associativité du barycentre H est le barycentre de $(G,3)$ et $(D,3)$. C'est-à-dire le milieu de $[GD]$.
H appartient donc à (GD)

3. On sait que :
H est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(D,3)$.
J est le barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$
L est le barycentre et $(A,1)$ et $(D,3)$
d'après l'associativité du barycentre H est le barycentre de $(J,2)$ et $(L,4)$ par homogénéité $(J,1)$ et $(L,2)$ donc H appartient à (JL).

4. On sait que
H est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(D,3)$.
I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$
K est le barycentre et $(C,1)$ et $(D,3)$
d'après l'associativité du barycentre H est le barycentre de $(I,2)$ et $(K,4)$ donc H appartient donc à (IK).
On peut donc affirmer que $H \in (GD)$, $H \in (JL)$, et $H \in (IK)$. Les trois droites (GD), (JL), et (IK) sont concourantes en H.

EXERCICE 3

1. A est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$ est équivalente à :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}\\
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}\\
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}\\
&\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

A est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$ » est équivalente à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à $ABCD$ est un parallélogramme..
La propriété « A est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$ » est équivalente à la propriété « $ABCD$ est un parallélogramme ».

2.

Théorème : Si G est le barycentre de (G_1,λ) et (C,μ) avec $\lambda+\mu \neq 0$ et si G_1 est le barycentre de (A,α) et (B,β) avec $\alpha+\beta \neq 0$ alors G est le barycentre de $(A, \dfrac{\lambda \times \alpha}{\alpha+\beta})$, $(B, \dfrac{\lambda \times \beta}{\alpha+\beta})$ et (C,μ).

$ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux parallélogrammes, on a donc A est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$ et A' est le barycentre de $(B',1)$, $(C',-1)$ et $(D',1)$ or I est barycentre de $(A,1)$ et de $(A',1)$.
En appliquant le théorème ci-dessus : I est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$, $(D,1)$, $(B',1)$, $(C',-1)$ et $(D',1)$ par associativité du barycentre I est le barycentre de $(J,2)$, $(K,-2)$, $(L,2)$ ce qui est équivalent à $IJKL$ est un parallélogramme.
Autre démonstration possible :
I est le mileu de $[AA']$ alors

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$$

$ABCD$ est un parallélogramme donc A est le barycentre de $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$.
$A'B'C'D'$ est un parallélogramme donc A' est le barycentre de $(B',1)$, $(C',-1)$ et $(D',1)$.
Pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$$
$$\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MB'}-\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}$$

En particulier pour I

$$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$$
$$\overrightarrow{IA'}=\overrightarrow{IB'}-\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}$$

d'où

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}-\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB'}-\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}$$

I est donc le barycentre des points $(B,1)$,$(B',1)$, $(C,-1)$,$(C',-1)$, $(D,1)$, et $(D',1)$ par associativité I est le barycentre des points $(J,2)$, $(K,-2)$, $(L,2)$ c'est-à -dire par homogéneité $(J,1)$, $(K,-1)$, $(L,1)$ et d'après la question **1.** $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 4

On a $U_0=0$.

1. **a.** $U_1=120$,
   $U_2=120-\dfrac{1}{4}\times 120+120=210$
   $U_3=210-\dfrac{1}{4}\times 210+120=277,5$

   b. Après la n-ième semaine, U_n perd un quart de son volume et on lui ajoute 120 donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   $U_{n+1}=U_n-\dfrac{1}{4}U_n+120=\dfrac{3}{4}U_n+120.$

   c. $U_2-U_1=90\neq U_3-U_2=67,5$; la suite (U_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{U_2}{U_1}=\dfrac{210}{120}=\dfrac{49}{28}$ et $\dfrac{U_3}{U_2}=\dfrac{277,5}{210}=\dfrac{37}{28}$.
   $\dfrac{U_2}{U_1}\neq\dfrac{U_3}{U_2}$ la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2. **a.** Voir *figure 3 p. 5.*

   b. Voir *figure 3 p. 5.*

   c. La suite (U_n) semble être croissante et pour un grand nombre de tontes, U_n semble s'approcher de 480.

3. **a.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1}=U_{n+1}-480$$

$$V_{n+1}=\frac{3}{4}U_n+120-480$$

$$V_{n+1}=\frac{3}{4}U_n-360$$

$$V_{n+1}=\frac{3}{4}(U_n-480)$$

$$V_{n+1}=\frac{3}{4}V_n$$

La suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $V_0 = -480$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad V_n = V_0 \times q^n = -480 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or $U_n = V_n + 480$ d'où $U_n = 480 \times (1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n)$

c. $U_{15} = 480 \times (1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{15}) \approx 473,59$

La semaine suivante les matières vont perdre un quart de leur volume,

il restera environ $500 - \dfrac{3}{4} \times U_{15} \approx 144,81$ litres de libres dans le bac. Le bac pourra donc contenir les 120 litres de la semaine suivante.

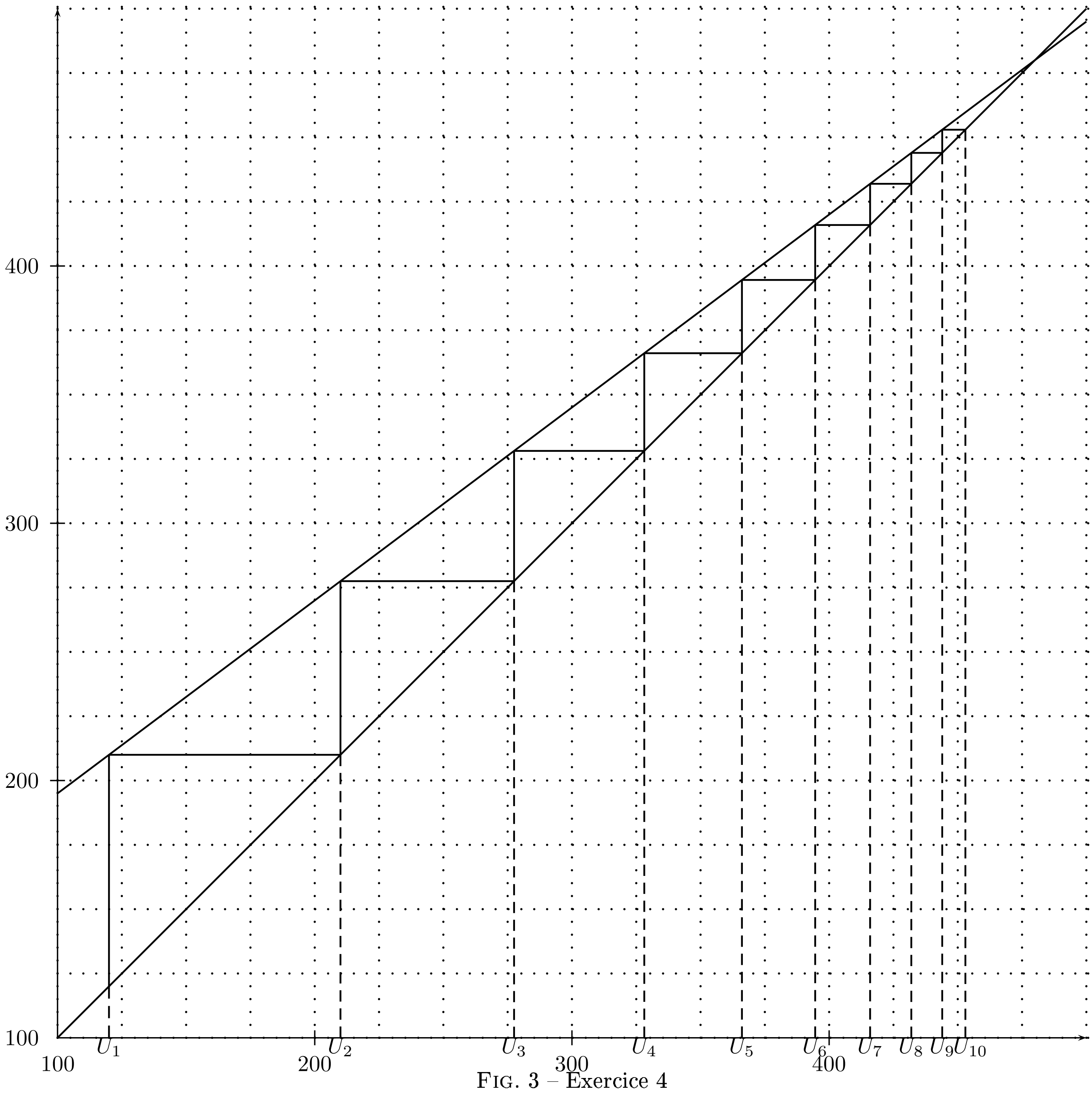

FIG. 3 – Exercice 4