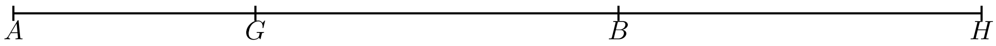
Exercice 1 :

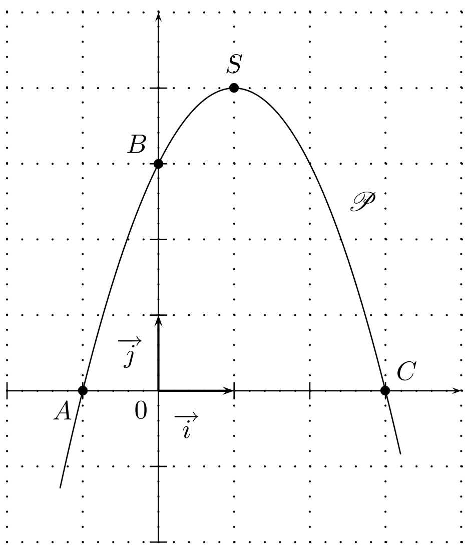
1. On peut construire G et H, en effet dans chaque cas la somme des coefficients est non-nulle. Pour construire la figure on peut soit utiliser une méthode géométrique à la règle et au compas soit établir les égalités vectorielles suivantes :
   - G barycentre des points $(A;3)$ et $(B;2)$ on a d'après le théorème 2 du cours : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$;
   - H barycentre des points $(A;-3)$ et $(B;8)$ on a d'après le théorème 2 du cours : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{8}{5}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

   On obtient la figure suivante :



2. On a $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH} = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ d'où $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BH}$ donc B est le milieu du segment $[GH]$.

Exercice 2 :
Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la parabole $\mathscr{P}$ passe par les points : $A(-1;0)$, $B(0;3)$, $S(1;4)$ et $C(3;0)$. Il y a plusieurs méthodes pour déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$.



Méthode 1 : On sait que l'équation d'une parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$, $\mathscr{P}$ passe par les points $A(-1;0)$, $B(0;3)$, et $C(3;0)$ on a donc :

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 3 = c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a - b = -3 \\ 9a + 3b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 3a - 3b = -9 \\ 9a + 3b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a - b = -3 \\ 12a = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = a + 3 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Une équation de la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $y = -x^2 + 2x + 3$ *(on reconnaît la forme devellopée et réduite du trinôme).*

Méthode 2 : La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points $A(-1;0)$ et $C(3;0)$, ce qui signifie que la fonction trinôme associée admet deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Une équation de la parabole $\mathscr{P}$ est de la forme
$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 3)$. Il ne reste plus qu'à déterminer le réel a.
$\mathscr{P}$ passe par le point $B(0;3)$ d'où

$3 = a(0+1)(0-3)$
$3a = -3$
$a = -1$
Une équation de la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $y = -(x+1)(x-3)$ *(on reconnaît la forme factorisée du trinôme).*

Méthode 3 : $S(1;4)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$. Dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ est $Y = -X^2$, on a $\left\{ \begin{array}{l} X = x - x_S = x - 1 \\ Y = y - y_S = y - 4 \end{array} \right.$ d'où $\begin{array}{l} Y = -X^2 \\ y - 4 = -(x-1)^2 \\ y = 4 - (x-1)^2 \end{array}$

Une équation de la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $y = 4 - (x-1)^2$ *(on reconnaît la forme cannonique du trinôme).*

Exercice 3 : Soit $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré avec a et c de signes contraires.

1. Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$.
   $b^2 \geq 0$ est un nombre positif, $4ac \leq 0$ car a et c sont de signes contraires alors $-4ac \geq 0$
   d'où $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ en tant que somme de nombres positifs.
   Le discriminant Δ est positif donc le trinôme admet donc une ou deux racines.
2. Dans le cas où le trinôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2.
   On peut remarquer que a et c de signe contraire implique $c \neq 0$ (0 en tant qu'élément neutre n'a pas de signe).
   (a) On sait que $\Delta > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) \times (-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

   (b) Si a et c sont de signes contraires, le rapport $\dfrac{c}{a}$ est strictement négatif d'où $x_1 \times x_2 < 0$ donc une racine est positive et l'autre est négative.

Exercice 4 :

1. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - (1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2})x + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$ on peut dire qu'elle est de la forme $x^2 - Sx + P = 0$.
   On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x_1 \times x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Les racines du trinôme sont évidentes $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, d'où $S = \{1; \dfrac{\sqrt{5}}{2}\}$

2. Pour résoudre dans $\mathbb{R} - \{\dfrac{1}{2}; 1\}$ l'inéquation suivante $\dfrac{-x^2 + x + 2}{(x-1)(x-\frac{1}{2})} \geq 0$, on étudie le signe du numérateur et celui du dénominateur.
   - Le trinôme $-x^2 + x + 2$ admet deux racines -1 et 2, il est négatif à l'extérieur des racines.
   - Le trinôme $(x-1)(x-\dfrac{1}{2})$ admet deux racines 1 et $\dfrac{1}{2}$, il est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x-1)(x-\frac{1}{2})$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)(x-\frac{1}{2})}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

On a donc $S = [-1; \dfrac{1}{2}[\cup]1; 2]$