Exercice 1 : Un point $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g$ si et seulement, si $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

On résout donc l'équation $2x+1 = \dfrac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ qui est équivalente à :

$$\frac{2x^2+3x}{x+1} = 0$$

$$\frac{2x(x+\frac{3}{2})}{x+1} = 0$$

On obtient deux solutions :

$x_1 = 0$ et $y_1 = 2 \times 0 + 1 = 1$ soit le point $M_1(0;1)$;

$x_2 = -\dfrac{3}{2}$ et $y_2 = 2 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 1 = -2$ soit le point $M_2(-\dfrac{3}{2};-2)$.

Exercice 2 :

1. I appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement, si $||\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}|| = \dfrac{a}{2}$.
   On pose $\overrightarrow{V}_I = \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}$, on cherche à déterminer $||\overrightarrow{V}_I||$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_I &= \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{V}_I &= \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CI} \\ \overrightarrow{V}_I &= \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

$$\text{or} \qquad \overrightarrow{IO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \qquad \overrightarrow{V}_I &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{V}_I &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ ||\overrightarrow{V}_I|| &= \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a \end{aligned}$$

   I appartient donc à $\mathscr{E}$.

2. Soit G le barycentre de $(O,1)$, $(B,1)$ et $(C,-1)$, on a pour tout point M du plan $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ or un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement, si $||\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|| = \dfrac{a}{2}$ ce qui est équivalent à $||\overrightarrow{MG}|| = \dfrac{a}{2}$ c'est-à-dire $MG = \dfrac{a}{2}$. On peut en déduire que $\mathscr{E}$ est un cercle de centre G et de rayon $\dfrac{a}{2}$.

Exercice 3 : Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions de cet exercice sont définies sur l'intervalle I.

1. L'assertion 1 est vraie.
   f est une fonction paire, pour tout x de I on a $f(-x) = f(x)$.
   g est une fonction impaire, pour tout x de I on a $g(-x) = g(x)$.
   Soit x un réel quelconque de I on a

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x) \times g(-x) \\ h(-x) &= f(x) \times (-g(x)) \\ h(-x) &= -f(x) \times g(x) \\ h(-x) &= -h(x) \end{aligned}$$

   donc pour tout x de I, $h(-x) = -h(x)$ la fonction h est une fonction impaire.

2. L'assertion 2 est fausse.
   Il suffit de considérer la fonction identité $x \longmapsto x$, cette fonction est croissante et impaire.
3. L'assertion 3 est fausse.
   Il existe une et une seule fonction paire et impaire sur $\mathbb{R}$ c'est la fonction nulle $x \longmapsto 0$.
4. Question facultative hors barême : l'assertion 4 est vraie.
   f est une fonction impaire, pour tout x de I, on a : $f(-x) = -f(x)$.
   Soit x un réel quelconque de I on a
   $$\begin{aligned} k(-x) &= |f(-x)| \\ k(-x) &= |-f(x)| \\ k(-x) &= |f(x)| \\ k(-x) &= k(x) \end{aligned}$$
   donc pour tout x de I, $k(-x) = k(x)$ la fonction k est une fonction paire.

Exercice 4 :

1. On a :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
   par définition du barycentre, D est le barycentre de $(E, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$
2. F est le milieu de $[AD]$ on a $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{0}$ donc par définition du barycentre F est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 1)$.
3. On sait que D est le barycentre de $(E, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ donc pour tout point M du plan on a
   $-\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$
   ce qui donne en particulier pour le point F
   $-\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD}$ soit
   $$\begin{aligned} & -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} \\ & -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{0} \\ \text{or} \quad & \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{FD} \\ \text{d'où} \quad & -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
   donc par définition du barycentre, F est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(E, -1)$.
   On sait que G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ par associativité du barycentre F est le barycentre $(G, 3)$ et $(E, -1)$, on en déduit que F appartient à la droite (EG). Les trois points E, F et G sont donc alignés