Exercice 1 :

1. *Rappel : mesure principale d'un angle de deux vecteurs non-nuls* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   Soit une α *une mesure de l'angle* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ $\alpha_k = \alpha + 2k\pi$ *est aussi une mesure de l'angle* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*. La mesure principale de l'angle* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *est parmi les réels* α_k*, l'unique valeur appartennant à l'intervalle* $]-\pi, \pi]$. On a donc :
   - $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$ la mesure principale de $\frac{5\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.
   - $\frac{-5\pi}{4} = \frac{-8\pi + 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$ la mesure principale de $-\frac{5\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.
   - $\frac{31\pi}{6} = \frac{36\pi - 5\pi}{6} = 12\pi - \frac{5\pi}{6}$ la mesure principale de $\frac{31\pi}{6}$ est $-\frac{5\pi}{6}$
2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $sin(-x) = sin(x)$, $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$ et $sin(\pi + x) = -sin(x)$.

$$A = cos(\frac{5\pi}{14}) + 2sin(\frac{\pi}{7}) + sin(\frac{8\pi}{7}) + sin(-\frac{\pi}{7})$$

$$A = cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}) + 2sin(\frac{\pi}{7}) + sin(\pi + \frac{\pi}{7}) - sin(\frac{\pi}{7})$$

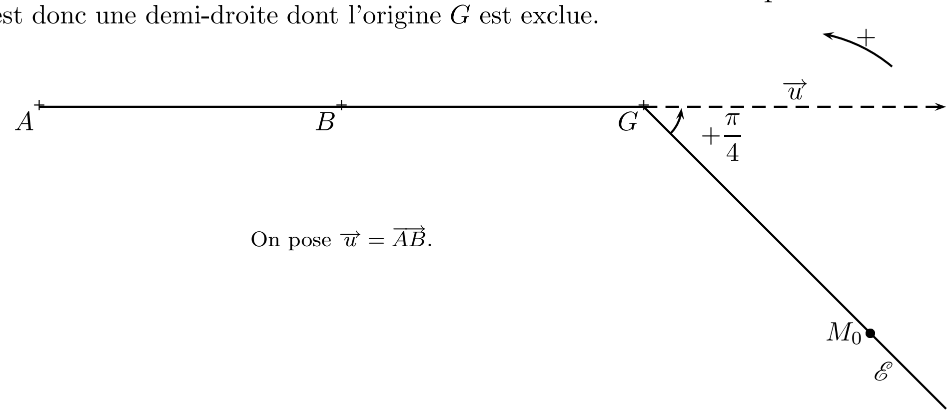
$$A = cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}) + 2sin(\frac{\pi}{7}) + sin(\pi + \frac{\pi}{7}) - sin(\frac{\pi}{7})$$

$$A = sin(\frac{\pi}{7}) + 2sin(\frac{\pi}{7}) - sin(\frac{\pi}{7}) - sin(\frac{\pi}{7})$$

$$A = sin(\frac{\pi}{7})$$

Exercice 2 :

Soit G le barycentre de $(A;1)$ et $(B,-2)$ on a pour tout M du plan on a $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GM}$.
Un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement, si $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$ ce qui est équivalent à $(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc une demi-droite dont l'origine G est exclue.



L'ensemble $\mathscr{E}$ est la demi-droite $]GM_0)$ avec M_0 un point tel que $(\overrightarrow{GM_0}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

1. (a) On sait que $ABCD$ est un carré et que AED est triangle équilatéral on a donc $AD = AB = AE$. Le triangle ADE est isocèle de sommet A.

   (b) On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ d'où $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

   On sait de plus que triangle AED est isocèle de sommet A on a $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$. On en conclut que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2}(\pi - (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})) = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

2. $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

   On en déduit que le triangle EBC est rectangle en B et comme il est isocèle on a donc $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) D'après la relation de Chasles et les questions précédentes on a

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$$
$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$
$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = \pi$$

   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont la même direction mais des sens opposés. On en déduit que les points E, D et F sont alignés.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

1. On chercher à déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = a + \frac{b}{x^2 + 1}$. On peut utiliser deux méthodes :

   Première méthode :

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $a + \frac{b}{x^2 + 1} = \frac{ax^2 + a + b}{x^2 + 1}$ or $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ pour que ces deux expressions soient égales il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

   d'où $a = 2$ et $b = -1$.

   Seconde méthode :

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$
$$f(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2 + 1}{x^2 + 1}$$
$$f(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 1}$$
$$f(x) = 2 + \frac{-1}{x^2 + 1}$$

   d'où $a = 2$ et $b = -1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-1}{x^2+1} < 0$ de plus :

$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 1 \geq 1$$
$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$
$$-\frac{1}{x^2+1} \geq -1$$
$$-1 \leq -\frac{1}{x^2+1}$$

on obtient $-1 \leq -\dfrac{1}{x^2+1} < 0$, il suffit d'ajouter 2, $1 \leq 2 - \dfrac{1}{x^2+1} < 2$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 \leq f(x) < 2$.