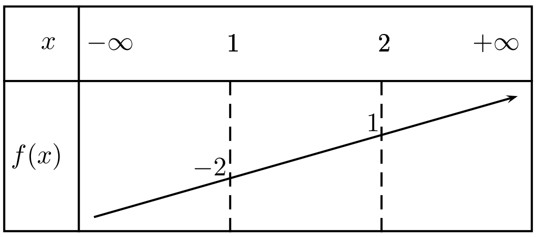
Exercice 1

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x - 5 \text{ et } g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

1. On veut montrer que, pour tout réel x, on a $1 \leq g(x) < 2$.
   (a) Pour tout réel x on a :
   $$0 < x^2 + 1 \leq 2x^2 + 1$$
   $$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x^2+1}{x^2+1} \leq \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$
   $$\text{d'où} \quad 1 \leq g(x)$$
   (b) Pour tout réel x on a,
   $$g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$
   $$g(x) = \frac{2x^2+2-1}{x^2+1}$$
   $$g(x) = \frac{2(x^2+1)-1}{x^2+1}$$
   $$g(x) = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1}$$
   $$g(x) = 2 - \frac{1}{x^2+1}$$
   Pour tout réel x, on a $-\dfrac{1}{x^2+1} < 0$ d'où $2 - \dfrac{1}{x^2+1} < 2$ donc $g(x) < 2$.
   (c) D'après 1 (a) et (b) pour tout réel x on a
   $$1 \leq g(x) < 2.$$
2. La fonction f est une fonction affine non constante, elle n'est donc ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$.
3. On a vu que pour tout réel x on a $1 \leq g(x) < 2$. Comme cette relation est vraie pour tout x elle est donc vérifiés par tous les réels $f(x)$. On a donc :
   $$1 \leq g(f(x)) < 2$$
   $$1 \leq (g \circ f)(x) < 2$$
   La fonction $g \circ f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.
4. 1^{re} méthode : on peut dresser le tableau de variation de la fonction affine f et remarquer que pour tout réel x on a $1 \leq g(x) < 2$.



On en déduit donc que pour tout réel x on a $-2 \leq (f \circ g)(x) < 1$.

2^{me} méthode : la fonction affine f est croissante et une fonction croissante conserve l'ordre. On a pour tout réel x :

$$\begin{array}{l} 1 \leq g(x) < 2 \\ f(1) \leq f(g(x)) < f(2) \\ -2 \leq (f \circ g)(x) < 1 \end{array}$$

Exercice 2

1. Soit $((U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite géométrique telle que $U_2 = 9$ et $U_5 = 243$.
   (a) La suite est géométrique, on a donc $U_5 = q \times U_4 = q \times q \times U_3 = q \times q \times q \times U_2$ d'où

   $$\begin{array}{ll} & U_5 = q^3 U_2 \\ \Leftrightarrow & q^3 = 27 \\ \Leftrightarrow & q = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array}$$

   On a aussi $U_2 = 3^2 \times U_0$ d'où $U_0 = 1$
   (b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3^n$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$
   Le calcul à la main de $2 \times 423\,644\,304\,721 + 1$ donne $847\,288\,609\,443$

   $$\begin{array}{ll} & S_n > 423\,644\,304\,721 \\ \Leftrightarrow & 3^n > 847\,288\,609\,443 \\ \Leftrightarrow & n > 25 \end{array}$$

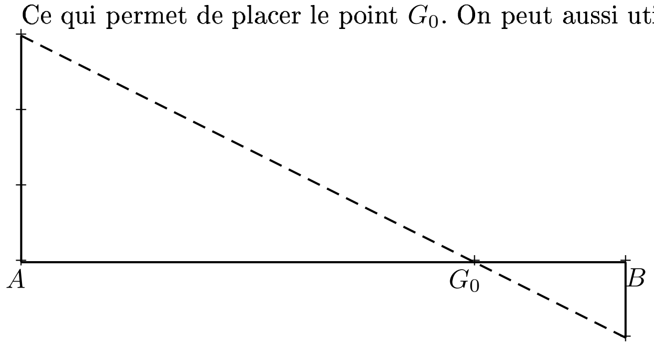
   A partir du rang $n_0 = 26$, la somme S_n est strictement supérieure à $423\,644\,304\,721$.
2. Soit A et B deux points disctincts du plan tels que $AB = 8\ cm$.
   (a) Rappelons qu'un système de points pondérés admet un barycentre si, et seulement si, la somme des coefficients du système est non nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$\begin{array}{l} U_{n+1} + U_n = 3^{n+1} + 3^n \\ U_{n+1} + U_n = 3^n(3+1) \\ U_{n+1} + U_n = 3^n \times 4 \neq 0 \end{array}$$

   donc le système $\{(A, U_n)\,;\,(B, U_{n+1})\}$ admet un barycentre G_n.
   (b) G_0 est le barycentre $\{(A, U_0)\,;\,(B, U_1)\}$, c'est-à-dire $\{(A,1)\,;\,(B,3)\}$ on a donc

   $$\begin{array}{l} \overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{G_0B} = \overrightarrow{0} \\ 4\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AG_0} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} \end{array}.$$

   Ce qui permet de placer le point G_0. On peut aussi utiliser une méthode géométrique.



   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 0$.
   1^{re} méthode : G_n est le barycentre de $\{(A, U_n)\,;\,(B, U_{n+1})\}$ c'est-à-dire de $\{(A, U_n)\,;\,(B, 3 \times U_n)\}$ et d'après la propriété d'homogénéité du barycentre (on ne change pas le barycentre en en multipliant les coefficents par un même réel non nul) on a G_n barycentre de $\{(A,1)\,;\,(B,3)\}$.

2^{me} méthode :

$$\begin{array}{l}
3^n\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{G_nB}=\overrightarrow{0}\\
3^n\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
(3^n+3^{n+1})\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
3^n\times(1+3)\times\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
3^n\times 4\times\overrightarrow{G_nA}+3^{n+1}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}
\end{array}.$$

$$\overrightarrow{AG_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n\times 4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG_n}=\frac{3^n\times 3}{3^n\times 4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

On reconnait l'égalité vectorielle vérifiéé par G_0, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $G_n=G_0$.

EXERCICE 3

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par :
$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n-5 \end{cases}$ et $v_n=5-u_n$.

1. Calcul des cinq premiers termes :

$$\begin{array}{lcl}
u_0=1 & \text{et} & v_0=4\\
u_1=-3 & \text{et} & v_1=8\\
u_2=-11 & \text{et} & v_2=16\\
u_3=-27 & \text{et} & v_3=32\\
u_4=-59 & \text{et} & v_4=64
\end{array}.$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=5-u_{n+1}=5-2u_n+5=2\times(5-u_n)=2\times v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0=4$

3. On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=4\times 2^n$ d'où $u_n=5-4\times 2^n=5-2^{n+2}$.

4. Pout tout $n\in\mathbb{N}$, on étudie le signe de la diférence $u_{n+1}-u_n$.

$$\begin{array}{l}
u_{n+1}-u_n=5-2^{n+3}--5+2^{n+2}\\
u_{n+1}-u_n=-2^{n+3}+2^{n+2}\\
u_{n+1}-u_n=2^{n+2}(1-2)\\
u_{n+1}-u_n=-2^{n+2}<0
\end{array}.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.