Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x - x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 12 - 2x$$

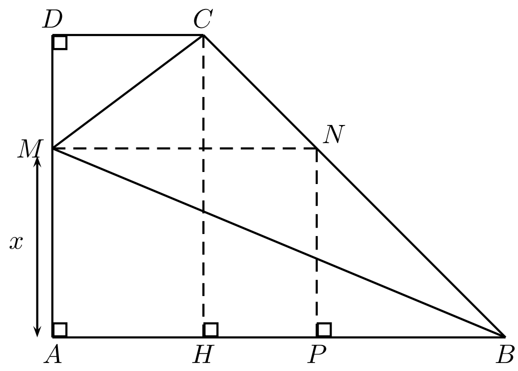
et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A

1. Dresser en justifiant le tableau de variation de la fonction f.
2. Tracer avec soin $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la *figure 1 p. 2*. On se limitera à l'intervalle $[-0,5\,;\,6,5]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$.
   En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On précisera les coordonnées des points d'intersection.

Partie B

La figure ci-contre représente un trapèze rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$, $CD = 2$ et $AD = 4$.
Un point M décrit le segment $[AD]$ et on pose $x = AM$.
On construit le rectangle $AMNP$ avec $N \in [BC]$.
On projette orthogonalement C en H sur $[AB]$.



1. Déterminer quel intervalle décrit x.
2. Quelle est la nature du triangle BCH ? Le démontrer.
3. Démontrer que $PB = x$.
4. Montrer que l'aire du rectangle $AMNP$ est $x(6 - x)$.
5. Calculer l'aire du trapèze $ABCD$, puis montrer que l'aire du triangle BCM est $12 - 2x$.

Partie C

Exploitation des résultats des parties précédentes.

1. Comment choisir le réel x pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit maximale ?
   Quelle particularité présente alors ce rectangle ? Justifier.
2. Comment choisir x pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale à celle du triangle BCM ?
   Quelle est alors la nature de ce triangle ? Justifier.
3. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels l'aire du rectangle $AMNP$ est supérieure à celle du triangle BCM.

Exercice 2

$ABCD$ est un quadrilatère et G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ (cf *figure 2 p. 3*).
L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 3)$
et K est le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 3)$.
Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.
Pour cela on utilisera le barycentre H de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 3)$.

1. Placer sur la *figure 2 p. 3*, en justifiant, les points L et K.
2. Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3. Montrer que H appartient à la droite (JL).
4. Montrer que (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Exercice 3

1. Démontrer que les propriétés « $ABCD$ est un parallélogramme » et « A est le barycentre de $(B, 1)$, $(C, -1)$ et $(D, 1)$ » sont équivalentes.
2. Application : soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de $[AA']$,$[BB']$, $[CC']$ et de $[DD']$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 4

Un jardinier tond sa pelouse chaque semaine, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost d'une capacité de 500 litres.
Chaque semaine, par décomposition, les matières stockées perdent un quart de leur volume.
Pour tout entier n, on désigne par U_n le volume, en litres, stocké après n tontes.
On a $U_0 = 0$.

1. **a.** Calculer U_1, U_2 et U_3.

b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 120$.

c. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. **a.** Sur la *figure 3 p. 3* tracer les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 120$ et Δ d'équation $y = x$.

b. Représenter à l'aide des droites $\mathscr{D}$ et Δ les termes U_1, U_2, ... U_{10} sur la *figure 3 p. 3*.

c. Que peut-on conjecturer pour U_n après un grand nombre de tontes ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n - 480$.

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer V_n en fonction de n. En déduire l'expression de U_n en fonction de n

c. Calculer le volume de compost contenu dans le bac après 15 tontes. Le bac pourra-t-il contenir les 120 litres de la semaine suivante ?

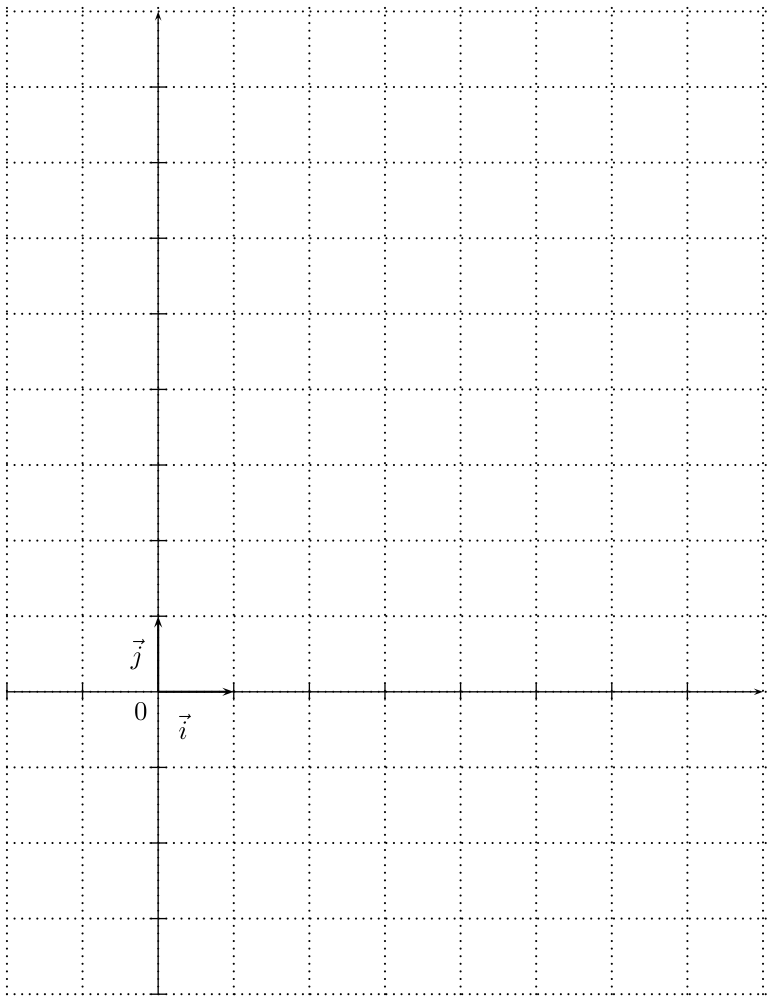


Fig. 1 – Exercice 1

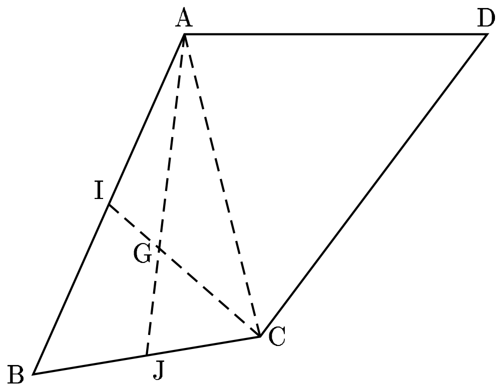


FIG. 2 – Exercice 2

Attention l'origine du repère ci-dessous est $(100, 100)$!

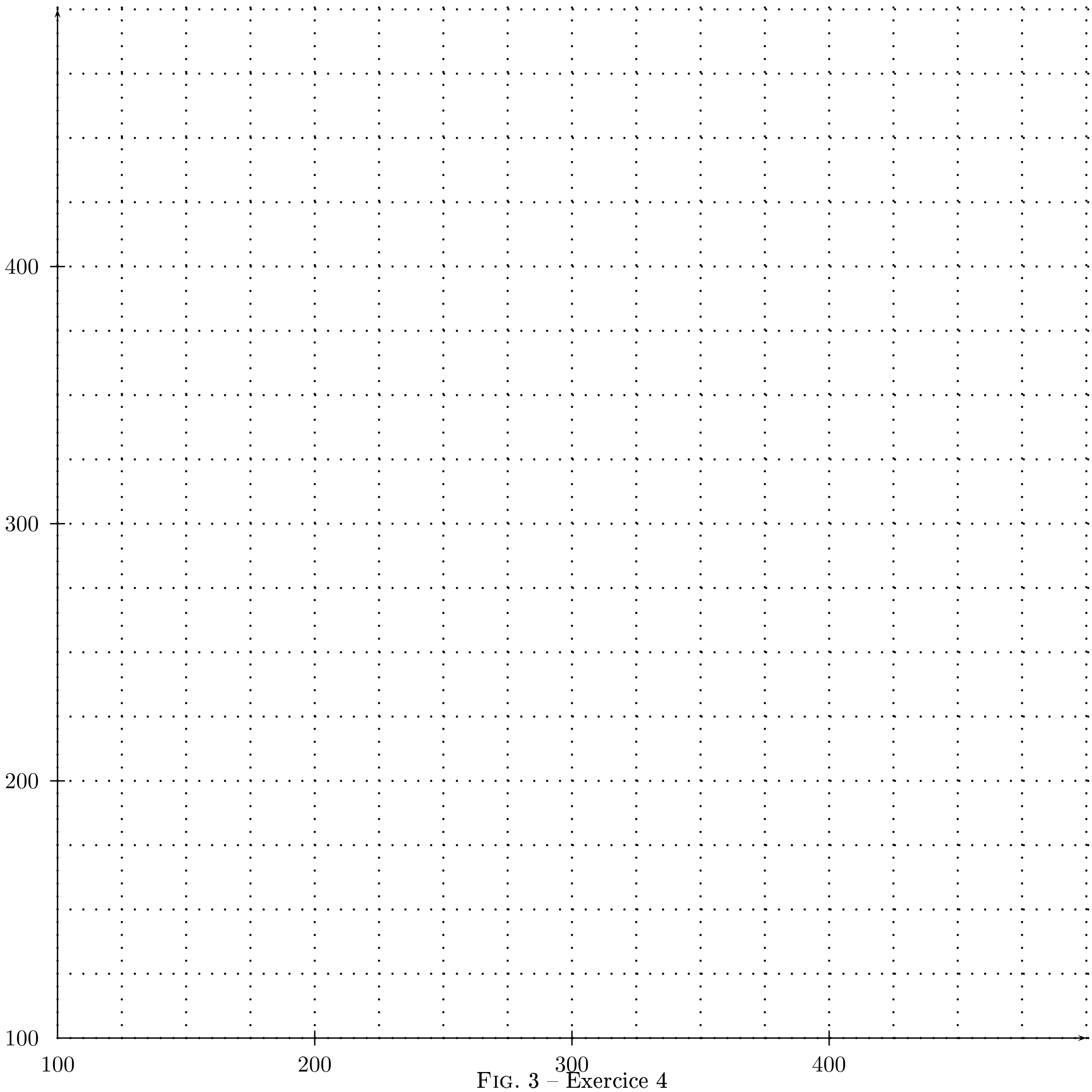


FIG. 3 – Exercice 4