Exercice 1

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x - 5 \text{ et } g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

1. On veut montrer que, pour tout réel x, on a $1 \leq g(x) < 2$.
   (a) En remarquant que, pour tout réel x on a $0 < x^2 + 1 \leq 2x^2 + 1$ montrer qu'on a $1 \leq g(x)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2+1}$. En déduire que, pour tout réel x, on a $g(x) < 2$.
   (c) Conclure.
2. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
3. Démontrer que la fonction $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$-2 \leq (f \circ g)(x) < 1$$

Remarque : pour les questions 3 et 4 on ne demande pas d'exprimer explicitement $g \circ f$ et $f \circ g$ en fonction de x

Exercice 2

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite géométrique telle que $U_2 = 9$ et $U_5 = 243$.
   (a) Déterminer le premier terme U_0 et la raison q de la suite U.
   (b) Exprimer U_n en fonction de n
   (c) A partir de quel rang la somme $S_n = \overbrace{U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}}^{n\ termes}$ est elle strictement supérieure à 423 644 304 721 ?
2. Soit A et B deux points disctincts du plan tels que $AB = 8\ cm$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système de points pondérés $\{(A, U_n) ; (B, U_{n+1})\}$ admet un barycentre que l'on notera G_n.
   (b) Construire G_0
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n est un seul même point, c'est-à-dire que G_n ne dépend pas de n.

Exercice 3

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases} \quad \text{et } v_n = 5 - u_n.$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite u_n et de la suite (v_n) .
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).