Suites arithmétiques

KBIDA A.

mardi 14 février 2006

5.4 Suites arithmétiques
- 5.4.1 Notion de suite arithmétique
- 5.4.2 Calcul du terme de rang n
- 5.4.3 Somme des n premiers termes

Définition

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent le même réel, appelé raison, la suite est dite arithmétique.

Définition

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent le même réel, appelé raison, la suite est dite arithmétique.
- la suite U est arithmétique de raison r, signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = U_n + r$.

Exemple

- $5\,;\,8\,;\,11\,;\,14\,;\,\ldots$ est une suite arithmétique, de premier terme 5 et de raison 3.

Méthode :

Pour démontrer qu'une suite U est arithmétique il faut :

Méthode :

Pour démontrer qu'une suite U est arithmétique il faut :

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence $U_{n+1} - U_n$ est un réel r constant

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $U_n = 3n + 1$ b) $U_n = n^2 + 1$

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $U_n = 3n + 1$ b) $U_n = n^2 + 1$

a) Les quatre premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 10$.

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $U_n = 3n+1$ b) $U_n = n^2+1$

a) Les quatre premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 10$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3n+1$ et $U_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+3+1 = 3n+4$ d'où

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $U_n = 3n+1$ b) $U_n = n^2+1$

a) Les quatre premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 10$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3n+1$ et $U_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+3+1 = 3n+4$ d'où $U_{n+1} - U_n = 3n+4-(3n+1) = 3$.

Exercices

Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $U_n = 3n + 1$ b) $U_n = n^2 + 1$

a) Les quatre premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 4$; $U_2 = 7$; $U_3 = 10$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = 3n + 1$ et $U_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$ d'où $U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - (3n + 1) = 3$.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 3.

Exercices

b) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1\,;\, U_1 = 2\,;$ $U_2 = 5$.

Exercices

b) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$.

La différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constante en effet, $U_1 - U_0 = 1$ et $U_2 - U_1 = 3$.

Exercices

b) Les trois premiers termes sont $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$.

La différence $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constante en effet, $U_1 - U_0 = 1$ et $U_2 - U_1 = 3$.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas une suite arithmétique.

Introduction

- Considérons la suite arithmétique U de premier terme $U_1 = 5$ et de raison de -3.

Introduction

- Considérons la suite arithmétique U de premier terme $U_1 = 5$ et de raison de -3.
- $U_2 = U_1 + r = 5 - 3 = 2$

Introduction

- Considérons la suite arithmétique U de premier terme $U_1 = 5$ et de raison de -3.
- $U_2 = U_1 + r = 5 - 3 = 2$
- $U_3 = U_2 + r = (U_1 + r) + r = U_1 + 2r = 2 - 3 = -1$

Introduction

- Considérons la suite arithmétique U de premier terme $U_1 = 5$ et de raison de -3.
- $U_2 = U_1 + r = 5 - 3 = 2$
- $U_3 = U_2 + r = (U_1 + r) + r = U_1 + 2r = 2 - 3 = -1$
- $U_4 = U_3 + r = (U_1 + 2r) + r = U_1 + 3r = -1 - 3 = -4$

Introduction

- Considérons la suite arithmétique U de premier terme $U_1 = 5$ et de raison de -3.
- $U_2 = U_1 + r = 5 - 3 = 2$
- $U_3 = U_2 + r = (U_1 + r) + r = U_1 + 2r = 2 - 3 = -1$
- $U_4 = U_3 + r = (U_1 + 2r) + r = U_1 + 3r = -1 - 3 = -4$
- On admet que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n = U_1 + (n-1)r$.

Théorème

Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est :

Théorème

Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est :

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Théorème

Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est :

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est :

Théorème

Le terme de rang n d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 et de raison r est :

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est :

$$U_n = U_0 + nr.$$

Exemple

soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 12$ et de raison 3.

Exemple

soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 12$ et de raison 3.

Le terme de rang 50
$U_{50} = U_1 + (50 - 1) \times r = 12 + 49 \times 3 = 159.$

Théorème :

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 est :

Théorème :

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 est :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

Théorème :

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique U de premier terme U_1 est :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

$$\text{Somme} = \frac{\text{nb de termes} \times (1^{er}\text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemple

Soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

Exemple

Soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1)$$

Exemple

Soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1)$$

$$S_n = \frac{(1+2n-1)(n)}{2} = n^2$$

Exemple

Soit la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison 2.

$S_n = U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} + U_n = 1+3+5\ldots+(2n-1)$

$S_n = \frac{(1+2n-1)(n)}{2} = n^2$

La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2

FIN.