Suites géométriques

KBIDA A.

Lundi 6 février 2006

Définition

- Lorsque chaque terme d'une suite s'obtient en multipliant le terme précédent par un même réel, appelé raison, la suite est dite géométrique.

Définition

- Lorsque chaque terme d'une suite s'obtient en multipliant le terme précédent par un même réel, appelé raison, la suite est dite géométrique.
- La suite U est géométrique de raison q si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = qU_n$

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; . . . est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- Les intérêts composés : un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4,5 %.

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- Les intérêts composés : un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4,5 %.

  $C_0 = 5\,000$

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; … est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- Les intérêts composés : un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4,5 %.

  $C_0 = 5\,000$

  $C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5\,225$

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- Les intérêts composés : un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4,5 %.

  $C_0 = 5\,000$

  $C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5\,225$

  $C_2 = C_1 \times 1,045 = 5\,355,625$

Exemples

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; ... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- Les intérêts composés : un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 4,5 %.

  $C_0 = 5\,000$

  $C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5\,225$

  $C_2 = C_1 \times 1,045 = 5\,355,625$

  Chaque année le capital est multiplié par $1,045$. Il s'agit donc d'une suite géométrique.

Méthode :

- Pour démontrer qu'une suite U est géométrique il faut :

Méthode :

- Pour démontrer qu'une suite U est géométrique il faut :
- s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$

Méthode :

- Pour démontrer qu'une suite U est géométrique il faut :
- s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$
- montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel q constant.

Introduction

- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a :

Introduction

- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a :
- $U_2 = q \times U_1$

Introduction

- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a :
- $U_2 = q \times U_1$
- $U_3 = q \times U_2 = q \times q \times U_1 = q^2 U_1$

Introduction

- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a :
- $U_2 = q \times U_1$
- $U_3 = q \times U_2 = q \times q \times U_1 = q^2 U_1$
- $U_4 = q \times U_3 = q \times q^2 U_1 = q^3 U_1$.

Introduction

- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q. On a :
- $U_2 = q \times U_1$
- $U_3 = q \times U_2 = q \times q \times U_1 = q^2 U_1$
- $U_4 = q \times U_3 = q \times q^2 U_1 = q^3 U_1$.
- On admet que pour tout entier n non nul, on a : $U_n = q^{n-1} U_1$.

Théorème

Le terme de rang n d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison q est :

Théorème

Le terme de rang n d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison q est :

$$U_n = q^{n-1} U_1$$

Théorème

Le terme de rang n d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison q est :

$$U_n = q^{n-1}U_1$$

Si le premier terme est U_0 alors le terme de rang n est $U_n = q^n U_0$.

Exemple

Soit U une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 3.

Exemple

Soit U une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 3.

Calculer U_{10}.

Exemple

Soit U une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 3.

Calculer U_{10}.

$U_{10} = 3^9 \times 100 = 1968300$

Théorème : cas particulier

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$ est :

Théorème : cas particulier

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$ est :

$S_n = 1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

Autres cas

- Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :

Autres cas

- Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :
- $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Autres cas

- Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :
- $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$
- $S_n = U_1 + qU_1 + q^2U_1 \ldots + q^{n-1}U_1$

Autres cas

- Dans le cas général U_1 n'est pas forcément égal à 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :
- $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$
- $S_n = U_1 + qU_1 + q^2U_1 \ldots + q^{n-1}U_1$
- $S_n = U_1(1 + q + q^2 \ldots + q^{n-1})$ d'où

Théorème : cas général

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :

Théorème : cas général

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique U de premier terme U_1 et de raison $q \neq 1$ est :

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$