# Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement A

Saisi par Michel Gosse http ://www.ac-poitiers.fr/

## Exercice 1 - Spécialités CIRA, Électronique, Électrotechnique, Génie optique et TPIL (sur 9 points)

**1.** Soit la fonction numérique $g$ définie sur $[0;\pi]$ par $g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t$.

**a.** Montrer que $g\,'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.

**b.** En déduire les variations de $g$ sur $[0;\pi]$.

**2.** Soit la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2} - \tau & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si} \quad \tau \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \frac{1}{2}$$

**a.** *Uniquement dans cette question*, on prendra $\tau = \dfrac{1}{6}$.
Représenter la fonction $f$ sur l'intervalle $[-1;1]$ dans un repère orthonormal.

**b.** On admet que la fonction $f$ satisfait aux conditions de Dirichlet.
Soit $S$ le développement en série de Fourier associé à la fonction $f$.
Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$

**3.** On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
Soit la fonction numérique $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$

On désigne par $E_h^2$ le carré de la valeur efficace de $h$ sur une période.

**a.** À l'aide de la formule de Parseval, déterminer $E_h^2$.

**b.** Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\ g(2\pi\tau)$.

**4.** Déterminer la valeur de $\tau$ rendant $E_h^2$ maximal.

## Exercice 1 - Spécialité IRIST (sur 9 points)

Le but de cet exercice est d'étudier une approximation du cercle de centre 0 et de rayon 1 par une courbe B-spline uniforme de degré 2, notée $\Gamma$, dont les points de contrôle $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ ont pour affixes respectives :

$$p_0 = \frac{16}{9}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad p_1 = \frac{16}{9} \quad , \quad p_2 = \frac{16}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad p_3 = p_0 \quad \text{et} \quad p_4 = p_1$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Les polynômes de Riesenfeld $R_k$ de degré 2, pour $k$ prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis par :

$$R_k(t) = 3\sum_{j=0}^{2-k}(-1)^j\ \frac{(t+2-k-j)^2}{j!\ (3-j)!}$$

La courbe B-spline $\Gamma$ est la réunion de trois arcs de courbe $C_j$, $j$ prenant les valeurs 1, 2 ou 3.
L'arc $C_j$ est l'ensemble des points $M_j(t)$ définis, pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$ par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM_j(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_{j-1}} + R_1(t)\overrightarrow{OP_j} + R_2(t)\overrightarrow{OP_{j+1}}$$

Les arcs $C_2$ et $C_3$ sont représentés sur la figure du document réponse.

**1. Questions préliminaires**

**a.** Vérifier que les coordonnées du point $P_0$ sont $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$.

**b.** Placer les points de contrôle $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ sur la figure du document réponse.

**c.** Développer et simplifier l'expression du polynôme $R_0$.

Dans toute la suite de cet exercice, on admettra que, pour tout $t$ dans l'intervalle $[0,1]$ :

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$$

**2. Étude de l'arc $C_1$**

On admet que les coordonnées $(x_1(t), y_1(t))$ du point $M_1(t)$ de l'arc $C_1$ sont, pour tout $t$ dans l'intervalle $[0,1]$ :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1) \\ y_1(t) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

**b.** Dans $[0\,;\,1\,440]$

$$q'(t) \geq 0$$
$$-0,002 + \tfrac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}} \geq 0$$
$$e^{-\frac{t}{4}} \geq \tfrac{1}{375}$$
$$-\tfrac{t}{4} \geq \ln(\tfrac{1}{375})$$
$$-\tfrac{t}{4} \geq -\ln(375)$$
$$t \leq 4\ln(375)$$

**c.** On déduit du signe de $q'$ que $q$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4\ln(375)]$ et décroissante sur l'intervalle $[4\ln(375)\,;\,1\,440]$. La fonction $q'$ s'annule en changeant de signe négative puis positive en $t_0 = 4\ln(375)$. La fonction $q$ admet un maximum en $t = t_0 \approx 23,7$

**2.** Au bout de 24 heures soit en minutes $t = 1440$, la quantité de principe actif restant dans le sang est $q(1440) \approx 0,12$

**3.** La valeur moyenne de $q$ sur l'intervalle $[0\,;\,1\,440]$ est :

$$V_m = \tfrac{1}{1440}\int_0^{1440} q(t)dt$$
$$V_m = \tfrac{1}{1440}\int_0^{1440} 3 - 0,002t - 3e^{-\frac{t}{4}}dt$$
$$V_m = \tfrac{1}{1440}\left[3t - 0,001t^2 + 12e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^{1440}$$
$$V_m = \tfrac{1}{1440}(2246,4 + 12e^{-360} - 12)$$
$$V_m = \tfrac{1}{1440}(2234,4 + 12e^{-360})$$





**a.** Étudier les variations des fonctions $x_1$ et $y_1$ définies ci-dessus et dresser un tableau des variations conjointes de ces deux fonctions. On donnera les coordonnées exactes des points $M_1(0)$, $M_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $M_1(1)$ de l'arc $C_1$.

**b.** Déterminer des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc $C_1$ aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

**c.** Vérifier que ces vecteurs sont orthogonaux respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{OM_1(0)}$ et $\overrightarrow{OM_1(1)}$.

**d.** Porter sur la figure du document réponse les tangentes à l'arc $C_1$ aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$. Tracer l'arc $C_1$ et les cercles de centre $O$ passant par les points $M_1(0)$ et $M_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**3. Étude de l'arc $C_2$**

**a.** On note $(x_2(t), y_2(t))$ les coordonnées du point $M_2(t)$ de l'arc $C_2$.
Vérifier que $x_2(t) = \dfrac{4}{3}t^2 - \dfrac{8}{3}t + \dfrac{4}{9}$.
On admettra dans toute la suite de l'exercice que :

$$y_2(t) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}t + \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

**b.** On considère la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Soit $M$ un point quelconque du plan et $M'$ son image par la rotation $r$.
Exprimer l'affixe $z\,'$ du point $M'$ en fonction de l'affixe $z$ du point $M$.

**c.** On note $(x, y)$ les coordonnées du point $M$ et $(x', y')$ celles du point $M\,' = r(M)$.

Vérifier que : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

**d.** En déduire que, pour tout $t$ dans l'intervalle $[0, 1]$, l'image du point $M_1(t)$ de l'arc $C_1$ par la rotation $r$ est le point $M_2(t)$ de l'arc $C_2$.

On admet que l'arc $C_2$ est l'image de l'arc $C_1$ par la rotation $r$ et que l'arc $C_3$, est l'image de l'arc $C_2$ par la rotation $r$.

**4. Calcul de l'aire $A$ de la surface intérieure à la courbe B-spline $\Gamma$**

**a.** On admet que l'aire de la surface délimitée par l'arc $C_1$ et la droite d'équation $x = \dfrac{4}{9}$ est donnée par l'intégrale :

$$I = \int_0^1 -y_1(t)x_1'(t)\ \mathrm{d}t$$

Calculer l'intégrale $I$.

**b.** En déduire la valeur arrondie, au centième, de l'aire de la surface intérieure à la courbe $\Gamma$.

**c.** Comparer le résultat avec l'aire d'un disque de rayon 1.

## Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 11 points)

*L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.*

### Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t$.
La fonction $\omega$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146 \qquad (1)$$

où $y$ désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive $t$.

1. **a.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
*On cherchera une solution particulière constante.*

   **b.** Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2. **a.** On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$. due au couple résistant.

   **b.** On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\dfrac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1 %.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

### Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation $\gamma$ du couple résistant sur la vitesse de rotation du





**Exercice 2** *A.Résolution d'une équation différentielle*

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,1\,440]$, on définit $f\ :\ t \mapsto \frac{1}{4}$ et $F\ :\ t \mapsto \frac{t}{4}$ une primitive de $f$ .

   Les solutions de l'équation $(E_0)$ sont les fonctions définies sur $[0\,;\,1\,440]$ par $y_0(t) = ke^{-\frac{t}{4}}$ avec $k$ un réel.

2. La fonction $g$ est une solution particulière de $(E)$ si, et seulement si, $4g' + g = -0,002t + 2,992$.

   De plus pour tout $t$ de $[0\,;\,1\,440]$ $g(t) = at + b$ et $g'(t) = a$

   d'où $4a + at + b = -0,002t + 2,992$

   $$\begin{cases} a = -0,002 \\ 4a + b = 2,992 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,002 \\ b = 2 \end{cases}$$

   La fonction $g$ définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par $g(t) = 3 - 0,002t$ est une solution particulière de $(E)$.

3. On sait que l'ensemble des solutions de $(E)$ est constitué d'une solution particulière plus les solutions de l'équation homogène $(E_0)$ donc $q$ est définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par :

   $$q(t) = 3 - 0,002t + ke^{-\frac{t}{4}} \text{ avec} k \in \mathbb{R}$$

4. On sait que $\begin{cases} q(0) = 0 \\ 3 + k = 0 \\ k = -3 \end{cases}$

   La solution $q$ de $(E)$ qui vérifie la condition initiale $q(0) = 0$ est définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par $q(t) = 3 - 0,002t - 3e^{-\frac{t}{4}}$.

*B.Etude d'une fonction et calcul intégral*

1. **a.** Pour tout $t$ de $[0\,;\,1\,440]$, $q'(t) = -0,002 + \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}$

- deux issues contraires, pas acceptables ou acceptables $p = 3\%$ et $q = 97\%$ ;
- on répéte $N$ fois la même expérience aléatoire ;
- les expériences sont indépendantes car le tirage est assimilé à un tirage avec remise.

**2.** **a.** $P(X = 1) = C_{10}^{1} \times (0,03)^1 \times (0,97)^9 \approx 0,23$

**b.** $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{10}^{0} \times (0,03)^0 \times (0,97)^1 0 \approx 0,26$

**3.** **a.** On a $\lambda = E(Y) = N \times p = 50 \times 0,03 = 1,5$.

**b.** $P(Z_1 \leq 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)$ à l'aide des tables de la loi de Poisson on a :
$P(Z_1 \leq 2) = 0,223 + 0,335 + 0,251 = 0,809 \approx 0,81$

**4.** La loi $Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 3\%)$ on a donc $E(Y) = 1000 \times 0,03 = 30$ et
$\sigma(Y) = \sqrt{1000 \times 0,03 \times 0,97} \approx 5,39$, on choisit donc $Z_2$ une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

**5.** $Z_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(30; 5,39)$ donc $T_2 = \frac{Z_2 - 30}{5,39}$ suit la loi normale centrée réduite.
$P(Z_2 \leq 25,5) = P(T_2 \leq -0,83) = 1 - \pi(0,83) = 1 - 0,7967 \approx 0,2$
La probabilité que dans un tel prélèvement au plus 25 comprimés ne soient pas acceptables est de 0,2.

*C. Intervalle de confiance*

**1.** $\overline{M}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0,9)$ donc $T_3 = \frac{10}{9}(\overline{M} - \mu)$ suit la loi normale centrée réduite.
$P(-t \leq T_3 \leq t) = 2\pi(t) - 1 = 95\%$ d'où $t = 1,96$.

$$P(-1,96 \leq T_3 \leq 1,96) = 95\%$$
$$P(\mu - 1,96 \times 0,9 \leq \overline{M} \leq \mu + 1,96 \times 0,9) = 95\%$$
$$P(\mu - 1,764 \leq \overline{M} \leq \mu + 1,764) = 95\%$$

Un intervalle de confiance centré sur $\overline{x} = 602$ avec le coefficient de confiance 95% est $[602 - 1,764; 602 + 1,764]$ soit $[600,24; 603,77]$





moteur.
On note $f(t)$ la différence, à l'instant $t$, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.
La fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200} f'(t) + f(t) = \gamma(t) \quad \text{avec} \quad f(0^+) = 0 \qquad (2)$$

On admet que la fonction $f$ possède une transformée de Laplace notée $F$.
La fonction $\gamma$ est définie par :

$$\gamma(t) = K[U(t) - U(t - \tau)]$$

où $\tau$ et $K$ sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et $U$ est la fonction échelon unité ( $U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geqslant 0$ ).

**1.** **a.** Représenter la fonction $\gamma$ pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.

**b.** Déterminer, en fonction de $\tau$ et $K$, la transformée de Laplace $\Gamma$ de la fonction $\gamma$.

**2.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer $F(p)$.

**3.** **a.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200}$$

pour tout réel $p$ strictement positif.

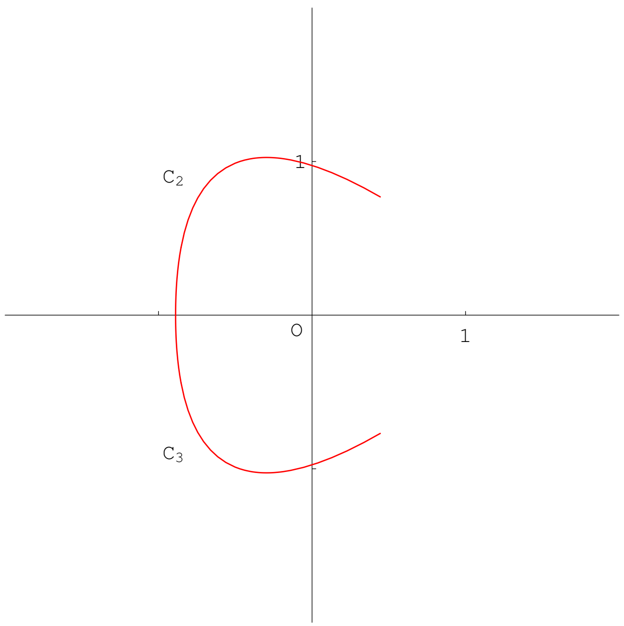
**b.** En déduire l'original $f$ de la fonction $F$. On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t) = K(1 - \mathrm{e}^{-200t}) & \text{si} \quad t \in [0, \tau[ \\ f(t) = K(\mathrm{e}^{200\tau} - 1)\mathrm{e}^{-200t} & \text{si} \quad t \in [\tau, +\infty[ \end{cases}$$

**c.** Donner le sens de variation de la fonction $f$ sur chacun des intervalles $[0, \tau[$ et $[\tau, +\infty[$.
Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de ces deux intervalles.

**d.** Représenter la fonction $f$ pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.
On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions $\gamma$ et $f$ dans le même repère.

**Document réponse à rendre avec la copie**








# Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement D

Auteur : Abdellatif KBIDA lycée A.Varoquaux TOMBLAINE

## Exercice 1

*A. Loi normale*

**1.** La variable aléatoire $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(600\,;9)$, la variable aléatoire $T = \frac{X-600}{9}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$580 \leq X \leq 620$$

$$\frac{580-600}{9} \leq \frac{X-600}{9} \leq \frac{620-600}{9}$$

$$-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}$$

D'où $P(580 \leq X \leq 620) = P(-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}) = 2\pi(\frac{20}{9}) - 1$
A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite on a
$P(580 \leq X \leq 620) = 2 \times 0,9861 - 1 = 0,9722 \approx 0,97$

**2.** $600 - a \leq X \leq 600 + a \Leftrightarrow -\frac{a}{9} \leq T \leq \frac{a}{9}$ On a donc :

$$P(600 - a \leq X \leq 600 + a) = 0,90$$

$$P(-\frac{a}{9} \leq T \leq \frac{a}{9}) = 0,90$$

$$2\pi(\frac{a}{9}) - 1 = 0,90$$

$$\pi(\frac{a}{9}) = 0,95$$

A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite on a $\frac{a}{9} \approx 1,65$ soit $a \approx 14,85$.

*B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale*

**1.** La variable aléatoire $Y$ suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(N, 3\%)$ :

*B.Etude d'une fonction et calcul intégral*

On admet dans cette partie que, pour tout $t$ de $[0\,;\,1\,440]$, $q(t) = 3 - 0,002t - 3e^{-\frac{t}{4}}$.

On rappelle que le temps $t$ est exprimé en minutes.

**1.** **a.** Calculer $q'(t)$ pour tout $t$ de $[0\,;\,1\,440]$.

**b.** Résoudre dans $[0\,;\,1\,440]$ l'inéquation $q'(t) \geq 0$.

**c.** En déduire le sens de variation de $q$ sur $[0\,;\,1\,440]$.

La fonction $q$ admet un maximum pour $t = t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ de $t_0$ et $q(t_0)$.

**2.** Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à $10^{-2}$ près.

**3.** Démontrer que la valeur moyenne $V_m$ de la fonction $q$ sur $[0\,;\,1\,440]$ est :

$$V_m = \frac{1}{1440}(2234,4 + 12e^{-360}).$$





# Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement A

Auteurs : Jean-Louis Coquin, LPI, Jaunay-Clan, et Xavier Tisserand, lycée Vieljeux, La Rochelle

## Exercice 1 - Spécialités CIRA, Électronique, Électrotechnique, Génie optique et TPIL (sur 9 points)

**1.** Soit la fonction numérique $g$ définie sur $[0;\pi]$ par $g(t) = (1 + \cos^2 t)\sin^2 t$.

**a.** Calculons $g'(t)$ :

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2\cos t \sin t \times \sin^2 t + (1+\cos^2 t) \times 2 \sin t \cos t \\ &= 2\sin t \cos t(-\sin^2 t + 1 + \cos^2 t) \\ &= 2\sin t \cos t(\cos^2 t + \cos^2 t) \\ &= 4 \sin t \cos^3 t \end{aligned}$$

**b.** Sur $[0;\pi]$, la fonction sinus est positive, par conséquent $g'(t)$ est du signe de $\cos t$.

$$\text{Si } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad : \quad g'(t) \geqslant 0$$

donc

$g$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

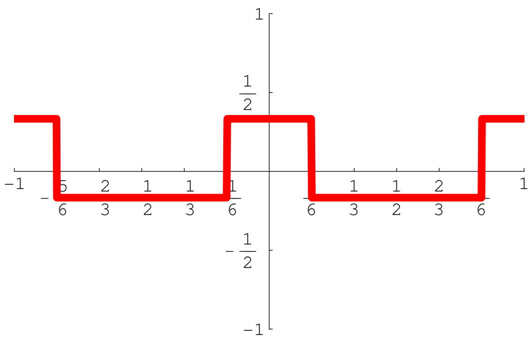
$$\text{Si } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad : \quad g'(t) \leqslant 0$$

donc $g$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

**2.** **a.** Dans cette question, on a : $f(t) = \dfrac{1}{3}$ sur $\left[0; \dfrac{1}{6}\right[$ et $f(t) = -\dfrac{1}{6}$ sur $\left[\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right]$.

Avec la parité de la fonction $f$, on peut tracer la courbe sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

De plus, la fonction $f$ est périodique de période 1, donc on obtient la représentation ci-dessous :




**b.** Calculons les coefficients de Fourier de la fonction $f$ :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\
&= 2\left[\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)dt + \int_{\tau}^{\frac{1}{2}}(-\tau)\,dt\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right).\tau + (-\tau).\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$





Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 comprimés prélevés au hasard et avec remise dans le stock, associe la moyenne des masses de comprimés de cet échantillon.
On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue $\mu$ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 9$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\overline{x} = 602$.

Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne inconnue $\mu$ des masses des comprimés du stock considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.

**Exercice 2** [8 points]
On décide de mesurer en fonction du temps la quantité de *principe actif* d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital. A l'instant $t$, exprimé en minutes, on note $q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenu dans le sang d'un patient.

**Les deux parties de cet exercice peuvent être traîtées de façon indépendante.**

*A.Résolution d'une équation différentielle*

On admet que la fonction $q$ est une solution de l'équation différentielle $(E)$ :

$$4y' + y = -0,002t + 2,992$$

où $y$ est une fonction de la variable réelle $t$ définie et dérivable sur $[0\,;\,1\,440]$ et $y'$ sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0)$ : $4y' + y = 0$.
2. Déterminer deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par $g(t) = at + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $q$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie la condition initiale $q(0) = 0$.

**1.** Justifier que la variable $Y$ suit la loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

**2.** Dans cette question, on prend $N = 10$.

**a.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé exactement, ne soit pas acceptable pour la masse.

**b.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé au moins, ne soit pas acceptable pour la masse.

**3.** Dans cette question, on prend $N = 50$.

**a.** On considère que la loi suivie par $Y$ peut être approchée par une loi de Poisson.

Déterminer le paramètre $\lambda$ de cette loi de Poisson.

**b.** On désigne par $Z_1$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ a la valeur obtenue au **a**. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 comprimés, au plus 2 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse.

**4.** Dans cette question, on prend $N = 1\,000$.

On décide d'approcher la loi de la variabe $Y$ par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

On note $Z_2$ une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

**a.** Justifier les paramètres de cette loi normale.

**b.** Calculer la probabilité que, dans un tel, prélèvement de 1 000 comprimés, au plus 25 comprimés ne soit pas acceptables pour la masse, c'est-à-dire calculer $P(Z_2 \leq 25,5)$.

*C. Intervalle de confiance*

Dans cette partie on s'intéresse à la masse d'un stock important de comprimés.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 comprimés dans le stock.





Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2\pi nt)\,dt \quad \text{car} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\left[\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\cos(2\pi nt)\,dt + \int_{\tau}^{\frac{1}{2}}(-\tau)\cos(2\pi nt)\,dt\right] \\
&= 4\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\left[\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^{\tau} + (-\tau)\,.\left[\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_{\tau}^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin(2\pi n\tau) - \tau\left[\sin(n\pi) - \sin(2\pi n\tau)\right]\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin(2\pi n\tau) + \tau\sin(2\pi n\tau)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin(2\pi n\tau)
\end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$, on a $b_n = 0$ car la fonction $f$ est paire.
On obtient donc :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(2\pi nt)\right)$$

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\pi}\sin(2\pi n\tau)\cos(2\pi nt)\,.$$

**3.** **a.** Écrivons la formule de Parseval :

$$E_h^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$$

On sait que $a_0 = 0$ ; calculons $a_1$ et $a_2$ :

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau) \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)$$

On a donc :

$$E_h^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi^2}\sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi^2}\sin^2(4\pi\tau)\right]$$

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau)\right]$$

De plus, on sait que :

$$\sin(2X) = 2\sin X \cos X$$

donc on peut écrire :

$$\sin^2(4\pi\tau) = [2\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi\tau)]^2 = 4\sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau)$$

Remplaçons dans $E_h^2$ :

$$\begin{aligned} E_h^2 &= \frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4}\sin^2(4\pi\tau)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\left[\sin^2(2\pi\tau) + \sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\sin^2(2\pi\tau)\left[1+\cos^2(2\pi\tau)\right] \end{aligned}$$

**b.** Posons $t = 2\pi\tau$ ; on a donc :

$$g(t) = g(2\pi\tau) = \left[1+\cos^2(2\pi\tau)\right]\sin^2(2\pi\tau)$$

On a donc bien :

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$$

**4.** D'après la question 1. ($b$), l'expression $g(t)$ est maximum pour $t = \dfrac{\pi}{2}$.
Par conséquent, $E_h^2$ est maximum pour :

$$2\pi\tau = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{1}{4}$$





# Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement D

Saisi par Abdellatif KBIDA http ://akbida.free.fr/

**Exercice 1** [12 points] **Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.**

Un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un certain type de comprimés dont la masse est exprimé en milligrammes.

**Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-2}$.**

*A. Loi normale*

Un comprimé de ce type est considéré comme acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [580 ; 620].
On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque comprimé prélevé au hasard dans la production associe sa masse.
On suppose que $X$ suit la loi normale de moyenne 600 et d'écart type 9.

**1.** Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard dans la production soit acceptable pour la masse.

**2.** Déterminer le nombre réel positif $a$ tel que :
$P(600 - a \leq X \leq 600 + a) = 0,90$.

*B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale*

On admet que 3 % des comprimés d'un lot ne sont pas acceptables pour la masse. On prélève au hasard $N$ comprimés de ce lot pour vérification de la masse. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de $N$ comprimés.
On considère la variable aléatoire $Y$ qui, à tout prélèvement de $N$ comprimés, associe le nombre de comprimés non acceptables pour la masse.

*C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.*

**1.** Lorsqu'on approche la loi de $Y_2$ par la loi de $Z$, on doit conserver les caractéristiques de $Y_2$, à savoir : Espérance et écart-type.
$E(Y_2) = 1000 \times 0,02 = 20$ et $\sigma(Y_2) = \sqrt{1000 \times 0,02 \times 0,98} = 4,43$
Il faut donc que $E(Z) = 20$ et $\sigma(Z) = 4,43$. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,43)$

**2.** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,3) \Leftrightarrow Z^* = \frac{Z-20}{4,43} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$
$P(Z \leq 15,5) = P\left(Z^* \leq \frac{-4,5}{4,43}\right) = \Pi\left(-\frac{4,5}{4,43}\right) = \Pi(-1,02) = 1 - \Pi(1,02) = 1 - 0,8461 = 0,1539 = 0,15$ à $10^{-2}$ près.

*C. Test d'hypothèse*

**1.** On prélève un échantillon de 100 rondelles et on calcule la moyenne $\bar{x}$ des diamètres de ces 100 rondelles.
Si $\bar{x} \in [89,967; 90,033]$ on accepte l'hypothèse $H_0 : \mu = 90$
Sinon, on accepte $H_1 : \mu \neq 90$.

**2.** $\bar{x}$ appartient à l'intervalle d'acceptation de $H_0$, donc, au seuil de risque de 5%, on peut conclure que la livraison est conforme pour le diamètre.





## Exercice 1 - Spécialité IRIST (sur 9 points)

**1.** **a.** L'affixe $p_0$ du point $P_0$ est :

$$p_0 = \frac{16}{9}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{8}{9} - i\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Donc les coordonnées du point $P_0$ sont :

$$P_0\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$$

**b.** Voir la figure.
Les coordonnées des points sont :

$$P_1\left(\frac{16}{9}, 0\right) \quad \text{et} \quad P_2\left(-\frac{8}{9}, +\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$$

**c.**

$$\begin{aligned} R_0(t) &= 3\sum_{j=0}^{2-k}(-1)^j \frac{(t+2-k-j)^2}{j!\,(3-j)!} \\ &= 3\left[(-1)^0\frac{(t+2)^2}{0!\,3!} + (-1)^1\frac{(t+1)^2}{1!\,2!} + (-1)^2\frac{(t+0)^2}{2!\,1!}\right] \\ &= 3\left[\frac{1}{6}(t^2+4t+4) - \frac{1}{2}(t^2+2t+1) + \frac{1}{2}t^2\right] \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$R_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$$

**2.** **a.** Les coordonnées du point $M_1(t)$ de l'arc $C_1$ sont, pour $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1) \\ y_1(t) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

On obtient, par dérivation :

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{4}{9}(-12t + 6) = \frac{8}{3}(-2t + 1) \\ y_1'(t) = \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

Tableau des variations conjointes :

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1{}'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x_1(t)$ | $\frac{4}{9}$ | $\nearrow$ | $\frac{10}{9}$ | $\searrow$ | $\frac{4}{9}$ |
| $y_1{}'(t)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y_1(t)$ | $\frac{-4\sqrt{3}}{9}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{-4\sqrt{3}}{9}$ |

Les coordonnées du point $M_1(0)$ sont :

$$M_1(0)\left(\frac{4}{9}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} x_1(0) = \dfrac{4}{9} \\ y_1(0) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

De la même façon, on obtient :

$$M_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{10}{9}, 0\right) \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} x_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{10}{9} \\ y_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Enfin :

$$M_1(1)\left(\frac{4}{9}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} x_1(1) = \dfrac{4}{9} \\ y_1(1) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

**b.** On sait que le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ de coordonnées $\overrightarrow{V(t)}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M\left(x(t), y(t)\right)$. Donc un vecteur directeur de la tangente à $C_1$ en $M_1(0)$ est :

$$\overrightarrow{V(0)}\begin{pmatrix} x_1'(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \overrightarrow{V(0)}\begin{pmatrix} \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{8\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$$





**b.** A $10^{-2}$ près : $I = 2,80$

**c.** $f \geq 0$ sur $[0;2]$ donc $I$ représente l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$

**Exercice 2** *A. Loi normale*

**1.** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(90; 0,17) \Leftrightarrow X_1^* = \frac{X_1 - 90}{0,17} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

$P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = P\left(\frac{-0,4}{0,17} \leq X_1^* \leq \frac{0,4}{0,17}\right) = 2\Pi\left(\frac{0,4}{0,17}\right) - 1 = 2\,\Pi(2,35) - 1 = 2 \times 0,9906 - 1 = 0,9812 = 0,98$ à $10^{-2}$ près

**2.** $D \hookrightarrow \mathcal{N}(90; \sigma_1) \Leftrightarrow D^* = \frac{D-90}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

$P(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99 \Leftrightarrow P\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leq D^* \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99 \Leftrightarrow$

$2\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$

D'où $\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995$ puis $\frac{0,4}{\sigma_1} = 2,575$ et enfin $\sigma_1 = \frac{0,4}{2,575} = 0,16$ à $10^{-2}$ près.

*B. Loi binomiale*

**1.** Pour chaque rondelle prélevée dans le stock, il y a deux issues possibles : Son diamètre est défectueux ou pas.
Le prélèvement étant assimilé à un tirage avec remise, il y a indépendance : La probabilité d'obtenir une rondelle avec un diamètre défectueux est la même à chaque tirage. C'est $p = 0,02$.
On effectue $n = 4$ tirages.
Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(4; 0,02)$

**2.** Si $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ : $P(Y_1 = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
D'où $P(Y_1 = 0) = C_4^0 0,02^0 (1 - 0,02)^{4-0} = 0,98^4 = 0,922$ à $10^{-3}$ près.

**3.** $P(Y_1 \leq 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1) = 0,98^4 + 4 \times 0,02 \times 0,98^3 = 0,998$ à $10^{-3}$ près.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$.

**2.** **a.** $\forall x \in \,]-1;+\infty[\; : f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-[2+\ln(1+x)]}{(1+x)^2} = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

**b.** $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1+x \leq \frac{1}{e}$ car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Finalement : $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1+\frac{1}{e}$
Un carré étant toujours positif, on en déduit le signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-1$ | | $-1+\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**c.**

| $x$ | $-1$ | | $-1+\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $0$ |

**3.** **a.** La troncature à l'ordre un de la partie régulière du développement limité de $f$ au voisinage de 0 permet d'énoncer qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 0 peut s'écrire : $y = 2 - x$

**b.** $f(x) - (2-x) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe, au voisinage de 0, que $\frac{1}{2}x^2$
Donc, au voisinage de 0, $f(x) - (2-x) \geq 0$ c'est à dire que la courbe est au dessus de la tangente.

*C. Intégration*

**1.** $\forall x \in \,]-1;+\infty[\; : G'(x) = \frac{1}{2}2\ln(1+x)\frac{1}{1+x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

**2.** $f(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + G'(x) \Rightarrow F(x) = 2\ln(1+x) + G(x)$
D'où $F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$

**3.** **a.** $I = \int_0^2 f(x)\,dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 2\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$





De la même façon, un vecteur directeur de la tangente à $C_1$ en $M_1(1)$ est :

$$\overrightarrow{V(1)}\begin{pmatrix} x_1'(1) \\ y_1'(1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{V(1)}\begin{pmatrix} -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{8\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$$

**c.** Le vecteur $\overrightarrow{V(0)}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM(0)}$ car leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{V(0)}\cdot\overrightarrow{OM(0)} = \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{8\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{4}{9} \\ -\dfrac{4\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{V(0)}\cdot\overrightarrow{OM(0)} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) = 0$$

Donc les deux vecteurs sont orthogonaux.
Même méthode pour démontrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{V(1)}$ et $\overrightarrow{OM(1)}$ sont orthogonaux.

**d.** Voir la figure.

**3.** **a.** On a :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\overrightarrow{OP_3}$$

avec :

$$P_1\left(\frac{16}{9}, 0\right) \quad , \quad P_2\left(-\frac{8}{9}, +\frac{8\sqrt{3}}{9}\right) \quad \text{et} \quad P_3\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$$

En ne considérant que l'abscisse du point $M_2$, on obtient :

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\frac{16}{9} + \left(-t^2 + t + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{9}\right) + \frac{1}{2}t^2\left(-\frac{8}{9}\right)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$x_2(t) = \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{9}$$

**b.** Si $M$ et $M'$ sont deux points du plan complexe d'affixes $z$ et $z'$ et si $M'$ est l'image de $M$ par la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors :

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\,z = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)z$$

Donc :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ z$$

**c.** Si les deux points $M$ et $M'$ ont pour coordonnées :

$$M(x, y) \quad \text{et} \quad M'(x', y')$$

alors les affixes $z$ et $z'$ de ces deux points sont :

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad \mathrm{z}' = \mathrm{x}' + \mathrm{i}\mathrm{y}'$$

On remplace dans l'expression précédente :

$$x' + \mathrm{i}y' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (\mathrm{x} + \mathrm{i}\mathrm{y})$$

On sépare les parties réelles et imaginaires, et on obtient :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

**d.** Si $M_1$ est un point de l'arc $C_1$, de coordonnées $M_1(x_1(t), y_1(t))$, son image $M_1'$ par la rotation $r$ a donc pour coordonnées $M_1'(x_1'(t), y_1'(t))$ avec :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\dfrac{1}{2}x_1(t) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1(t) \\ y_1'(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1(t) - \dfrac{1}{2}y_1(t) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1)\right] - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right] \\ y_1'(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\dfrac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1)\right] - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{cases} x_1'(t) = \dfrac{4}{3}t^2 - \dfrac{8}{3}t + \dfrac{4}{9} \\ y_1'(t) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}t^2 + \dfrac{8\sqrt{3}}{9}t + \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$





# Eléments de correction - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement B

Auteur :Alain Liétard, Lycée Gustave Eiffel, Gagny.

## Exercice 1

*A. Equation différentielle.*

**1.** Sur $]-1;+\infty[$, l'équation peut s'écrire $y' = -\frac{1}{1+x}y$.
La fonction $A$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $A(x) = \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $a$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $a(x) = \frac{1}{1+x}$
On en déduit (voir formulaire) la solution générale de $(E)$ : $y = ke^{-\ln(1+x)} = ke^{\ln\frac{1}{1+x}} = \frac{k}{1+x}$ où $k$ désigne une constante réelle quelconque.

**2.** $g$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in\ ]-1;+\infty[\ : g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$
De plus, $\forall x \in\ ]-1;+\infty[\ : (1+x)\,g'(x) + g(x) = (1+x)\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}$
Donc $g$ est solution de $(E)$

**3.** **Théorème :** *La solution générale de l'équation $y' = a(x)\,y + b(x)$ peut s'obtenir en ajoutant, à une solution particulière de cette équation, la solution générale de l'équation homogène associée : $y' = a(x)\,y$.*
On en déduit que la solution générale de $(E)$ peut s'écrire : $y = \frac{k+\ln(1+x)}{1+x}$

**4.** $f$ étant solution de $(E)$ : $f(x) = \frac{k+\ln(1+x)}{1+x}$
$f(0) = 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

*B. Etude de fonction*

**1.** $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}$

On note $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

**1.** Justifier les paramètres de cette loi normale.

**2.** Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer $P\left(Z \leq 15,5\right)$

*D. Test d'hypothèse*

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne $\mu$ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une grosse livraison à effectuer.

On note $X_2$ la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire $X_2$ suit la loi normale de moyenne inconnue $\mu$ et d'écart-type $\sigma = 0,17$.

On désigne par $\bar{X}_2$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 90$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 90$.

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

**1.** Enoncer règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle $H_0$, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$P\left(89,967 \leq \bar{X}_2 \leq 90,033\right) = 0,95$$

**2.** On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\bar{x} = 90,02$.
Peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?





C'est à dire :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \end{cases}$$

Le point image du point $M_1(t)$ de l'arc $C_1$ est donc bien le point $M_2(t)$ de l'arc $C_2$.

**4. a.** Calculons l'intégrale $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 -y_1(t)x_1'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(t-\frac{1}{2}\right) \times \frac{8}{3}(-2t+1)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{64\sqrt{3}}{27} \times \frac{1}{2}\left(2t-1\right)\left(2t-1\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{32\sqrt{3}}{27}\left(2t-1\right)^2\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{27}\left[\frac{1}{6}\left(2t-1\right)^3\right]_0^1 = \frac{16\sqrt{3}}{81}\left[(1)^3-(-1)^3\right] = \frac{32\sqrt{3}}{81} \end{aligned}$$

**b.** Pour calculer l'aire de la surface intérieure à la courbe, il faut multiplier par 3 l'intégrale $I$ et ajouter l'aire de triangle équilatéral intérieur de coté $M_1(0)M_1(1) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.
Or, on sait que la hauteur $h$ d'un triangle équilatéral de côté $c$ est donnée par :

$$h = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc son aire $s$ est :

$$s = \frac{1}{2} \times c \times h = \frac{1}{2} \times c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{27}$$

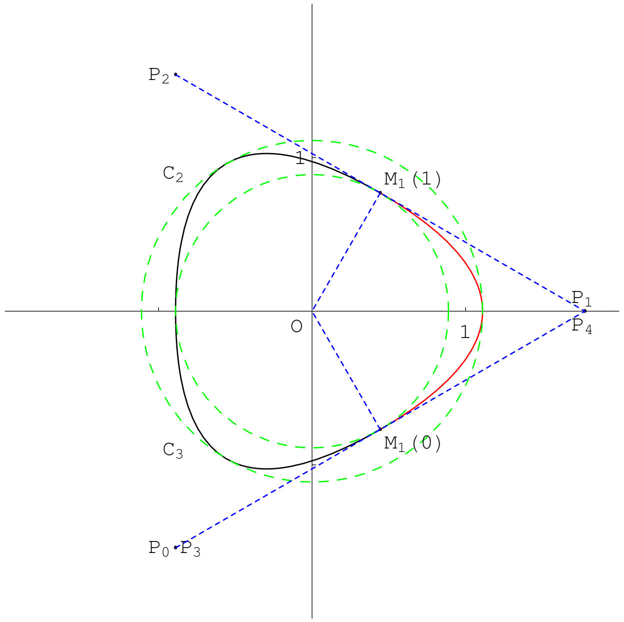
L'aire de la courbe intérieure est $3 \times \dfrac{32\sqrt{3}}{81} + \dfrac{16\sqrt{3}}{27} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ dont la valeur arrondie au centième est $3,08$.

**c.** L'aire d'un disque de rayon 1 est égale à $\pi$. On a :

$$\frac{\frac{16\sqrt{3}}{9}}{\pi} \approx 0,98$$

donc l'approximation est très convenable.

Document réponse :








que la variable aléatoire $D$ suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart-type $\sigma_1$.
Déterminer $\sigma_1$ pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

*B. Loi binomiale*

On note $E$ l'événement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0,02$.

On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.

On considère la variable aléatoire $Y_1$ qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

**1.** Justifier que la variable aléatoire $Y_1$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

**2.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à $10^{-3}$.

**3.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à $10^{-3}$.

*C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire $Y_2$ qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire $Y_2$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,02$. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire $Y_2$ par la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

1. Déterminer la dérivée de la fonction $G$ définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$G(x) = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$$
2. En déduire qu'une primitive de $f$ sur $]-1;+\infty[$ est définie par :
$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$$
3. **a.** On note $I = \int_0^2 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.

   **b.** Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ de $I$.

   **c.** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au (b)

**Exercice 1** [9 points]**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

**Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-2}$**

*A. Loi normale*

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle $[89,6; 90,4]$.

1. On note $X_1$ la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire $X_1$ suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type $\sigma = 0,17$. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : Il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.
On note $D$ la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose





## Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 11 points)

## Partie A

1. **a.** Il faut résoudre l'équation homogène associée :
$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 0$$
La solution générale est donnée par :
$$\omega(t) = K.\mathrm{e}^{-200t} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$
Il faut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une constante, c'est à dire :
$$\omega(t) = \omega_0 \quad \text{donc} \quad \omega'(t) = 0$$
Remplaçons dans l'équation (1) ; on obtient :
$$\frac{1}{200} \times 0 + \omega_0 = 146 \quad \text{donc} \quad \omega_0 = 146$$
Une solution particulière est donc :
$$\omega(t) = 146$$
La solution générale de l'équation complète est obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène à une solution particulière de l'équation avec second membre, c'est-à-dire :
$$\omega(t) = K.\mathrm{e}^{-200t} + 146 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$
**b.** On a $\omega(0) = 150$ donc $\omega(0) = K.\mathrm{e}^0 + 146 = 150$ donc $k = 4$.
On a donc bien :
$$\omega(t) = 4\mathrm{e}^{-200t} + 146$$
2. **a.** On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-200t} = 0$ donc :
$$\omega_\infty = \lim_{t\to+\infty} \omega(t) = 146$$
La perte de vitesse est donc :
$$\omega(0) - \omega_\infty = 4$$

**b.** On a :

$$\left|\frac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right| = \left|\frac{4\mathrm{e}^{-200t}}{146}\right| = \frac{2\mathrm{e}^{-200t}}{73}$$

Il faut donc résoudre :

$$\left|\frac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right| < \frac{1}{100}$$

Donc :

$$\frac{2}{73}\mathrm{e}^{-200t} < \frac{1}{100}$$

Il vient :

$$\mathrm{e}^{-200t} < \frac{73}{200} \quad \text{donc} \quad -200t < \ln 0,365$$

D'où :

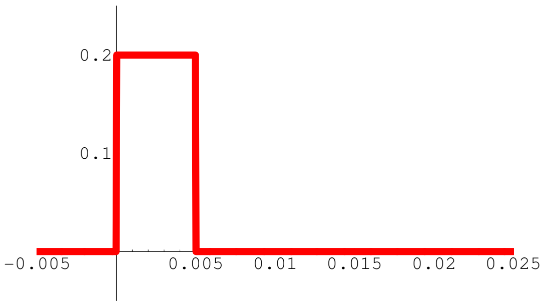
$$t > \frac{\ln 0,365}{-200} \quad \text{et on obtient :} \quad t > 0,00503929$$

En conclusion la valeur approchée cherchée est :

$$t = 0,005\text{s} = 5\text{ms}$$

## Partie B

1. **a.** La représentation de la fonction $\gamma$ est :

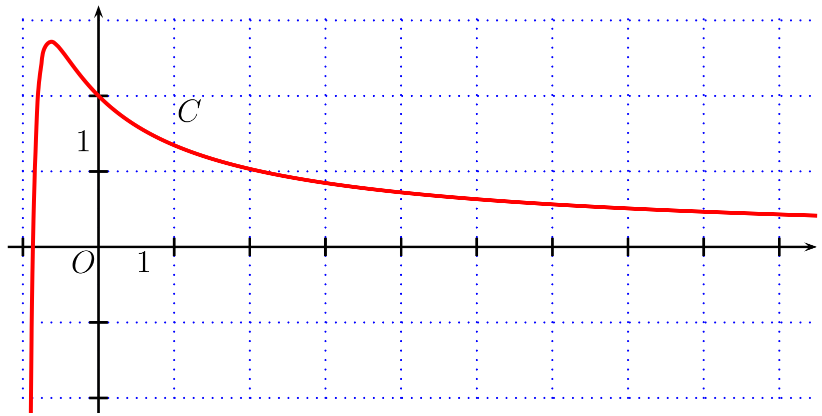



**b.** La transformée de Laplace de $\gamma(t)$ est :

$$\Gamma(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\tau p}\right] = \frac{K}{p}\left[1-e^{-\tau p}\right]$$








**1.** On admet que $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ ?

**2.** **a.** Démontrer que, pour tout $x$ de $]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

**b.** Résoudre dans $]-1;+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geq 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque $x$ varie dans $]-1;+\infty[$.

**c.** Etablir le tableau de variation de $f$.

**3.** Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

*Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.*

**a.** En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

**b.** Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

*C. Calcul intégral*

# Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement B

Saisi par Michel Gosse http ://www.ac-poitiers.fr/

**Exercice 1** [11 points] **Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

*A. Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E)$ :

$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $y'$ sa fonction dérivée.

**1.** Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_0)$ :
$$(1+x)\,y' + y = 0$$
sont les fonctions définies par $h(x) = \frac{k}{x+1}$ où $k$ est une constante réelle quelconque.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$
Démontrer que la fonction $g$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

*B. Etude d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.





**2.** On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2) :

$$\frac{1}{200}\left[pF(p) - 0\right] + F(p) = \frac{K}{p}\left[1 - e^{-\tau p}\right]$$

On développe et on factorise $F(p)$ :

$$F(p)\left[\frac{p}{200} + 1\right] = \frac{K}{p}\left[1 - e^{-\tau p}\right]$$

Donc :

$$F(p) = \frac{200}{p+200}\frac{K}{p}\left[1 - e^{-\tau p}\right] = K\frac{200}{p(p+200)}\left[1 - e^{-\tau p}\right]$$

**3.** **a.** On peut écrire :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200} = \frac{a(p+200)+bp}{p(p+200)} = \frac{(a+b)p+200a}{p(p+200)}$$

On identifie :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 200a = 200 \end{cases} \quad \text{donc} \quad a = 1 \text{ et } b = -1$$

En conclusion :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+200}$$

**b.** On sait que :

$$F(p) = K\frac{200}{p(p+200)}\left[1 - e^{-\tau p}\right]$$

On peut donc écrire d'après la question 3. $(a)$ :

$$F(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200}\right]\left[1 - e^{-\tau p}\right]$$

Développons :

$$F(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200} - \frac{1}{p}e^{-\tau p} + \frac{1}{p+200}e^{-\tau p}\right]$$

Par conséquent l'original de la fonction F est :

$$f(t) = K\left[U(t) - \mathrm{e}^{-200t}U(t) - U(t-\tau) + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)}U(t-\tau)\right]$$

i. Si $t < 0$ :

$$f(t) = K[0 - 0 - 0 + 0] = 0$$

ii. Si $0 \leqslant t < \tau$ :

$$f(t) = K\left[1 - \mathrm{e}^{-200t} - 0 + 0\right] = K\left[1 - \mathrm{e}^{-200t}\right]$$

iii. Si $t \geqslant \tau$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= K\left[1 - \mathrm{e}^{-200t} - 1 + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)}\right] \\ &= K\left[-\mathrm{e}^{-200t} + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)}\right] \\ &= K\left[-\mathrm{e}^{-200t} + \mathrm{e}^{-200t}\mathrm{e}^{200\tau}\right] \\ &= K\mathrm{e}^{-200t}\left[-1 + \mathrm{e}^{200\tau}\right] \end{aligned}$$

**c.** i. Si $t < 0$ :

$$f(t) = 0 \text{ donc } f \text{ est constante sur } ]-\infty, 0[$$

ii. Si $0 \leqslant t < \tau$ :

$f(t) = K\left[1 - \mathrm{e}^{-200t}\right]$ donc $f'(t) = 200K\mathrm{e}^{-200t} > 0$ car $K > 0$ et $\mathrm{e}^{-200t} > 0$

Donc $f$ est croissante sur $[0, \tau[$.

iii. Si $t \geqslant \tau$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= K\mathrm{e}^{-200t}\left[-1 + \mathrm{e}^{200\tau}\right] \text{ donc } f'(t) = -200K\mathrm{e}^{-200t}\left[-1 + \mathrm{e}^{200\tau}\right] < 0 \\ &\phantom{=} \text{car } -200K < 0 \text{ et } \mathrm{e}^{200\tau} > 1 \end{aligned}$$

Donc $f$ est décroissante sur $[\tau, +\infty[$.

Déterminons les limites aux bornes :

i. $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = K\left[1 - \mathrm{e}^{0}\right] = 0$

ii. $\lim\limits_{t \to \tau^-} f(t) = K\left[1 - \mathrm{e}^{-200\tau}\right]$

iii. $\lim\limits_{t \to \tau^+} f(t) = K\mathrm{e}^{-200\tau}\left[-1 + \mathrm{e}^{200\tau}\right] = K\left[-\mathrm{e}^{-200\tau} + 1\right]$

On remarque donc que :

$$\lim_{t \to \tau^+} f(t) = \lim_{t \to \tau^-} f(t)$$

iv. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-200t} = 0$

**d.** On obtient le graphique ci-dessous :