Mathématiques - brevet de technicien supérieur Analyses Biologiques session 1998 1 heure

Saisi par Abdellatif KBIDA http ://akbida.free.fr/

Exercice 1 [8 points]

Pour étudier l'érythroblastose, on injecte du fer radioactif par voie veineuse, on constate que sa concentration plasmatique décroît au cours du temps, cette décroissance est caractérisée par une période T (temps en minutes au bout duquel la concentration a diminué de moitié).
Cet examen effectué sur un échantillon de 400 sujets sains a donné les résultats suivants :

Période	Nombre de sujets	Période	Nombre de sujets
[60, 65[	5	[95, 100[	54
[65, 70[	11	[100, 105[	48
[70,75[	18	[105, 110[	35
[75,80[	29	[110, 115[	25
[80,85[	40	[115, 120[	15
[85, 90[	51	[120, 125[	8
[90, 95[	57	[125, 130[	4

1. Calculer une valeur approchée de la moyenne m_e et l'écart type σ_e de cette série, arrondis au dixième le plus proche.

2. On admet que T, la variable aléatoire exprimant la période, suit la loi normale de paramètres m et σ ; donner des estimations ponctuelles pour m et σ.

3. Donner un intervalle de confiance pour m, au seuil de risque 5 %.

Exercice 2 12 points]

Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence, a conduit à stipuler que l'évolution de la population suit l'équation différentielle suivante :

$$(E_1)\ :\ N'(t) = 2N(t) - 0,0045(N(t))^2 \text{ avec } t \geq 0$$

où le temps t est exprimé en heures et $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t.
Le nombre initial d'individus (à l'instant $t = 0$) est $N_0 = 103$.

1. On pose $Y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$

a. Caluler la dérivée de la fonction Y

b. Montrer que Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E_2)\ :\ Y'(t) = 2Y(t) + 0,0045 \text{ avec } t \geq 0$$

c. Résoudre l'équation (E_2).
(On cherchera une solution particulière constante).

d. Montrer alors que, compte tenu de la condition initiale, on a :

$$N(t) = \frac{2}{0,0045 - 0,0025e^{-2t}}$$

2. Soit la fonction f définie pour $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{2}{-0,0025e^{-2t} + 0,0045}$$

a. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

b. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unités graphiques : 5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 individus sur l'axe des ordonnées).

c. En admettant que $N(t) = f(t)$, au bout de combien de temps la population initiale aura-t-elle diminué de moitié ?