

**Mathématiques - brevet de technicien supérieur**  
**session 2001 - groupement D**

Saisi par Abdellatif KBIDA <http://akbida.free.fr/>

**Exercice 1** [12 points]

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant  $t$ ) sont respectivement notées  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ . Le temps  $t$  est exprimé en secondes et les températures en  $^{\circ}\text{C}$ .

**Partie A**

Les températures  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (1) & \alpha'(t) = -0,011(\alpha(t) - \beta(t)) \\ (2) & \beta'(t) = 0,021(\alpha(t) - \beta(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha(0) = 40 \\ \beta(0) = 10 \end{cases}$$

1. On pose  $f(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ .
  - a. Vérifier que  $f$  est une solution de l'équation différentielle  $y' + 0,032y = 0$ .
  - b. Résoudre l'équation précédente.
  - c. Calculer  $f(0)$  et montrer que  $f(t) = 30e^{-0,032t}$ .
2. Soit  $F$  la primitive de  $f$  qui vérifie  $F(0) = 0$ .
  - a. Exprimer  $F(t)$  en fonction de  $t$ .
  - b. A l'aide de la condition (2) justifier que  $\beta(t) = K + 0,02F(t)$  où  $K$  est une constante.
  - c. Déterminer  $K$  et donner une expression de  $\beta(t)$  en fonction de  $t$ .

**Partie B**

Pour tout  $t$  dans  $[0; +\infty[$  on pose 
$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{5}{16} \left( 95 + 33e^{-\frac{4t}{125}} \right) \\ \beta(t) = \frac{5}{16} \left( 95 - 63e^{-\frac{4t}{125}} \right) \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de  $\alpha$  ainsi que celle de  $\beta$  en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces fonctions ?
2. Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ .
3. Construire les courbes représentatives des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  dans un repère orthogonal (sur papier millimétré; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisse et 2 cm pour  $5^{\circ}\text{C}$  en ordonnée; on fera varier  $t$  entre 0 et 120 secondes).
4. A partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à  $1^{\circ}\text{C}$  ?

**Exercice 2** [8 points]

Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.

On appelle  $p$  la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.

Si le magicien est un imposteur on a  $p = \frac{1}{2}$ ; sinon  $p > \frac{1}{2}$ .

On appellera échantillon de taille  $n$  toute réalisation de  $n$  tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

**Partie A**

On suppose  $p = \frac{1}{2}$  et on note  $Y$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille  $n$ , associe le nombre de succès du magicien.

(On arrondira les probabilités au dix millième le plus proche)

1. Dans cette question on prend  $n = 20$ .
  - a. Quelle est la loi suivie par  $Y$ ? Donner ces paramètres.
  - b. Calculer la probabilité  $P(Y = 15)$ .
2. Dans cette question on prend  $n = 100$ . On admet que la variable aléatoire  $Y$  peut être approchée par une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi normale.
  - a. Préciser les paramètres de cette loi normale.
  - b. Utiliser cette approximation pour calculer  $P(Y > 60)$ .

## Partie B

On appelle  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille  $n$ , associe la fréquence des succès obtenus par le magicien au cours des  $n$  tirages d'une carte.

On admet que  $F$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $p$  et d'écart-type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ .

On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5%, si le magicien est un imposteur.

On choisit comme hypothèse nulle  $H_0 : p = \frac{1}{2}$ , et comme hypothèse alternative  $H_1 : p > \frac{1}{2}$ .

1. Calculer, sous l'hypothèse  $H_0$ , le réel positif  $h$  tel que  $P(F \leq \frac{1}{2} + h) = 0,95$ .
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5%, que le magicien est un imposteur?