Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2005 - groupement D

Auteur : Abdellatif KBIDA lycée A.Varoquaux TOMBLAINE

Exercice 1

A. Loi normale

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(600\,;\,9)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X-600}{9}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$580 \leq X \leq 620$$

$$\frac{580-600}{9} \leq \frac{X-600}{9} \leq \frac{620-600}{9}$$

$$-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}$$

D'où $P(580 \leq X \leq 620) = P(-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}) = 2\pi(\frac{20}{9}) - 1$
A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite on a
$P(580 \leq X \leq 620) = 2 \times 0,9861 - 1 = 0,9722 \approx 0,97$

2. $600 - a \leq X \leq 600 + a \Leftrightarrow -\frac{a}{9} \leq T \leq \frac{a}{9}$ On a donc :

$$P(600 - a \leq X \leq 600 + a) = 0,90$$

$$P(-\frac{a}{9} \leq T \leq \frac{a}{9}) = 0,90$$

$$2\pi(\frac{a}{9}) - 1 = 0,90$$

$$\pi(\frac{a}{9}) = 0,95$$

A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite on a $\frac{a}{9} \approx 1,65$ soit $a \approx 14,85$.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale

1. La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(N, 3\%)$:
   - deux issues contraires, pas acceptables ou acceptables $p = 3\%$ et $q = 97\%$;
   - on répéte N fois la même expérience aléatoire ;
   - les expériences sont indépendantes car le tirage est assimilé à un tirage avec remise.
2. **a.** $P(X = 1) = C_{10}^{1} \times (0,03)^1 \times (0,97)^9 \approx 0,23$
   b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{10}^{0} \times (0,03)^0 \times (0,97)^10 \approx 0,26$
3. **a.** On a $\lambda = E(Y) = N \times p = 50 \times 0,03 = 1,5$.
   b. $P(Z_1 \leq 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)$ à l'aide des tables de la loi de Poisson on a :
   $P(Z_1 \leq 2) = 0,223 + 0,335 + 0,251 = 0,809 \approx 0,81$
4. La loi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 3\%)$ on a donc $E(Y) = 1000 \times 0,03 = 30$ et $\sigma(Y) = \sqrt{1000 \times 0,03 \times 0,97} \approx 5,39$, on choisit donc Z_2 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $5,39$.
5. Z_2 suit la loi normale $\mathcal{N}(30; 5,39)$ donc $T_2 = \dfrac{Z_2 - 30}{5,39}$ suit la loi normale centrée réduite.
   $P(Z_2 \leq 25,5) = P(T_2 \leq -0,83) = 1 - \pi(0,83) = 1 - 0,7967 \approx 0,2$
   La probabilité que dans un tel prélèvement au plus 25 comprimés ne soient pas acceptables est de $0,2$.

C. Intervalle de confiance

1. $\overline{M}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;0,9)$ donc $T_3=\dfrac{10}{9}(\overline{M}-\mu)$ suit la loi normale centrée réduite.
   $P(-t\leq T_3\leq t)=2\pi(t)-1=95\%$ d'où $t=1,96$.

$$\begin{array}{l}P(-1,96\leq T_3\leq 1,96)=95\%\\ P(\mu-1,96\times 0,9\leq \overline{M}\leq \mu+1,96\times 0,9)=95\%\\ P(\mu-1,764\leq \overline{M}\leq \mu+1,764)=95\%\end{array}$$

   Un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}=602$ avec le coefficient de confiance 95% est $[602-1,764;602+1,764]$ soit $[600,24;603,77]$

Exercice 2 *A.Résolution d'une équation différentielle*

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,1\,440]$, on définit $f\,:\,t\mapsto\dfrac{1}{4}$ et $F\,:\,t\mapsto\dfrac{t}{4}$ une primitive de f .
   Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $[0\,;\,1\,440]$ par $y_0(t)=ke^{-\frac{t}{4}}$ avec k un réel.
2. La fonction g est une solution particulière de (E) si, et seulement si, $4g'+g=-0,002t+2,992$.
   De plus pour tout t de $[0\,;\,1\,440]$ $g(t)=at+b$ et $g'(t)=a$
   d'où $4a+at+b=-0,002t+2,992$
   $\left\{\begin{array}{l}a=-0,002\\ 4a+b=2,992\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-0,002\\ b=2\end{array}\right.$
   La fonction g définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par $g(t)=3-0,002t$ est une solution particulière de (E).
3. On sait que l'ensemble des solutions de (E) est constitué d'une solution particulière plus les solutions de l'équation homogène (E_0) donc q est définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par :

$$q(t)=3-0,002t+ke^{-\frac{t}{4}}\ \text{avec}k\in\mathbb{R}$$

4. On sait que $\left\{\begin{array}{l}q(0)=0\\ 3+k=0\\ k=-3\end{array}\right.$
   La solution q de (E) qui vérifie la condition initiale $q(0)=0$ est définie sur $[0\,;\,1\,440]$ par $q(t)=3-0,002t-3e^{-\frac{t}{4}}$.

B.Etude d'une fonction et calcul intégral

1. **a.** Pour tout t de $[0\,;\,1\,440]$, $q'(t)=-0,002+\dfrac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}$
   b. Dans $[0\,;\,1\,440]$

$$\begin{array}{l}q'(t)\geq 0\\ -0,002+\dfrac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}\geq 0\\ e^{-\frac{t}{4}}\geq\dfrac{1}{375}\\ -\dfrac{t}{4}\geq\ln(\dfrac{1}{375})\\ -\dfrac{t}{4}\geq-\ln(375)\\ t\leq 4\ln(375)\end{array}$$

   c. On déduit du signe de q' que q est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4\ln(375)]$ et décroissante sur l'intervalle $[4\ln(375)\,;\,1\,440]$.
   La fonction q' s'annule en changeant de signe négative puis positive en $t_0=4\ln(375)$. La fonction q admet un maximum en $t=t_0\approx 23,7$
2. Au bout de 24 heures soit en minutes $t=1440$, la quantité de principe actif restant dans le sang est $q(1440)\approx 0,12$

3. La valeur moyenne de q sur l'intervalle $[0\,;\,1\,440]$ est :

$$V_m = \frac{1}{1440}\int_0^{1440} q(t)dt$$

$$V_m = \frac{1}{1440}\int_0^{1440} 3 - 0,002t - 3e^{-\frac{t}{4}}dt$$

$$V_m = \frac{1}{1440}\left[3t - 0,001t^2 + 12e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^{1440}$$

$$V_m = \frac{1}{1440}(2246,4 + 12e^{-360} - 12)$$

$$V_m = \frac{1}{1440}(2234,4 + 12e^{-360})$$