Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2006 - groupement D

Saisi par Abdellatif KBIDA http ://akbida.free.fr/

Exercice 1 [12 points]

A. Loi binomiale et loi de Poisson

1 Le paramètre de cette loi de Poisson est tel que $\lambda = E(X)$ or $E(X) = 40 \times 0,075 = 3$ d'où $\lambda = 3$.

2 La variable aléatoire X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
On a, en utilisant le formulaire :

$$P(X_1 \leq 4) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)$$
$$P(X_1 \leq 4) = 0,05 + 0,149 + 0,224 + 0,224 + 0,168$$
$$P(X_1 \leq 4) = 0,815.$$

.

La probabilité que dans un prélévement de 40 bouteilles il y ait au plus quatre bouteilles contenant de l'eau calcaire est environ 0,815.

B. Loi normale

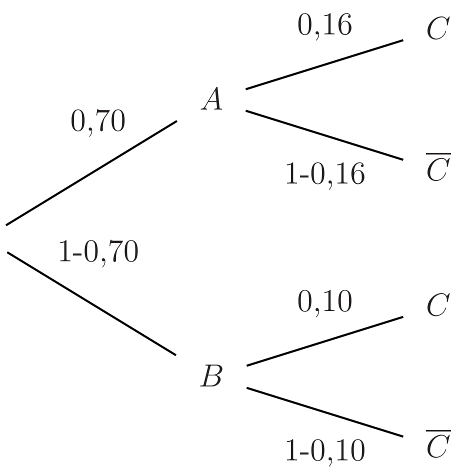
1 La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart-type 1,5 donc la variable aléatoire $T = \dfrac{Y-5}{1,5}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$P(Y \leq 6,5) = P(\frac{Y-5}{1,5} \leq 1)$$
$$P(Y \leq 6,5) = P(T \leq 1) = \pi(1)$$
$$P(Y \leq 6,5) \approx 0,841$$

2 La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1 soit calcaire est égale à $P(Y > 6,5) = 1 - P(Y \leq 6,5) \approx 0,159$.

C. Probabilités conditionnelles

1 On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



On en déduit que :
$P(A) = 0,70$,
$P(B) = 1 - 0,70 = 0,30$
$P(C/A) = 0,16$
$P(C/B) = 0,10$.

2 On sait que $P(C \cap A) = P(C/A) \times P(A)$ et $P(C \cap B) = P(C/B) \times P(B)$ d'où $P(C \cap A) = 0,112$ et $P(C \cap B) = 0,03$.

3 On a $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = 0,112 + 0,03 = 0,142$.

4 La probabilité de l'évènement : « l'eau contenue dans une bouteille provient de la source 1 sachant qu'elle est calcaire » est $P(A/C)$ or
$P(A/C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,112}{0,142} \approx 0,789$.

D. Intervalles de confiance

1 Une estimation ponctuelle de la moyenne inconnue μ est $\overline{x} = 5,37$.

2 La variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{10}$ donc la variable aléatoire $\overline{T} = \dfrac{\overline{Z} - \mu}{0,99}$ suit la loi normale centrée réduite.
$P(-t \leq \overline{T} \leq t) = 2\pi(t) - 1 = 0,95$ soit $t = 1,96$
$P(\mu - 1,96 \times 0,099 \leq \overline{Z} \leq \mu + 1,96 \times 0,099) = 0,95$
$P(\overline{Z} - 1,96 \times 0,099 \leq \mu \leq \overline{Z} + 1,96 \times 0,099) = 0,95$
Un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison, avec le coefficient de confiance de 95% est $I \approx [\overline{x} - 1,96 \times 0,099, \overline{x} + 1,96 \times 0,099]$ or $\overline{x} = 5,37$ d'où $I \approx [5,18; 5,56]$.

Exercice 2 [8 points]

Les parties A et B de cet exercice peuvent ï¿½re traitées de faï¿½n indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

1 L'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,01y = 0$ est une équation homogène.
Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on détermine une primitive de la fonction $t \mapsto 0,01$.
La fonction définie sur $[0, +\infty[$, $t \mapsto 0,01t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto 0,01$.
Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,01t}$ avec k un réel.

2 La fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) si et seulement si pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $g'(t) + 0,01g(t) = 24$.

$$\begin{aligned} & g'(t) + 0,01g(t) = 24 \\ \Leftrightarrow\ & 0 + 0,01 \times a = 24 \\ \Leftrightarrow\ & a = 2400 \end{aligned}$$

La fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 2400$ est une solution particulière de (E)

3 Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions générales de l'équation différentielle homogène (E_0) une solution particulière de (E).
Les solutions sont donc les fonctions h définies sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = k\mathrm{e}^{-0,01t} + 2400$ avec k un réel.

4 La fonction v est une solution de l'équation différentielle (E), donc pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $v(t) = k\mathrm{e}^{-0,01t} + 2400$ de plus $v(0) = 0$ d'où $k = -2400$.
On a donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $v(t) = 2400(1 - \mathrm{e}^{-0,01t})$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit v la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $v(t) = 2400(1 - \mathrm{e}^{-0,01t})$.

1 On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,01t = -\infty$ d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,01t} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 2400$.

2 On désigne par v' la fonction dérivée de la fonction v. Pour tout t de $[0, +\infty[$ on a $v'(t) = 2400(-(-0,01\mathrm{e}^{-0,01t})) = 24\mathrm{e}^{-0,01t}$.

3 On sait que pour tout t de $[0, +\infty[$ on a $v'(t) = 24\mathrm{e}^{-0,01t} > 0$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 2400$ on en déduit donc le tableau de variation de la fonction v.

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	$+$	
$v(t)$	0 $\nearrow$	$2\,400$

4 On cherche à résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation $v(t) = 1200$.

$$\begin{aligned} & v(t) = 1200 \\ & 2400(1 - \mathrm{e}^{-0,01t}) = 1200 \\ & 1 - \mathrm{e}^{-0,01t} = 0,5 \\ & \mathrm{e}^{-0,01t} = 0,5 \\ & -0,01t = \ln 0,5 \\ & t = -100 \ln 0,5 \\ & t = 100 \ln 2 \\ & t \approx 69,3. \end{aligned}$$

L'équation $v(t) = 1200$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$, $t = 100 \ln 2 \approx 69,3$.

C. Application des résultats de la partie B

1 La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance $M = \frac{2}{100} \times 60 = 1,2\, m^3 = 1\,200\, l$, donc lorsque $v(t) = 1200$ d'après la B.4 soit 69,3 heures (2 jours 21 heures 18 minutes) après le début de la pollution.

2 4 % du volume du réservoir représentent $\frac{4}{100} \times 60 = 2,4\ m^3 = 2\,400\ l$ or d'après la partie B, pour tout t de $[0, +\infty[$ on a $v(t) < 2\,400$.
On en conclut que le volume de substance M dans le réservoir ne peut pas dépasser 4 % du volume du réservoir.