BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR BLANC

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPE D

Durée : 2 heures

Spécialité : Analyses Biologiques

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci)

Exercice 1 [10 points]
Dans cet exercice, les quatre parties peuvent être traitées de façon indépendante. La partie A a pour objet la détermination d'une loi d'évolution à partir de données statistiques. Les parties B et C correspondent à des modélisations données du phénomène étudié. La partie D envisage l'évolution de la population dans un nouveau contexte.

Partie A
On procède à une réimplantation d'écrevisses. On lâche 100 individus et on relève tous les six mois l'effectif n de la colonie d'écrevisses en fonction du temps écoulé t (exprimé en mois).
On obtient ainsi huit effectifs n_i (i variant de 1 à 8) :

Temps t_i (en mois)	0	6	12	18	24	30	36	42
Effectifs n_i	100	160	350	900	2 500	7 500	22 000	64 000

1. On pose $y = \ln(3n - 200)$ où ln représente la fonction logarithme néperien. Calculer les valeurs $y_i = \ln(3n_i - 200)$ pour i variant de 1 à 8 (valeurs décimales arrondies au millième le plus proche). On donnera ces valeurs dans un tableau.
2. Représenter le nuage de points $M_i(t_i, y_i)$ dans un repère orthogonal FIG. 1 (unités graphiques : 3 cm pour 6 mois sur l'axe des abscisses, 1 cm par unité sur l'axe des ordonnées).
3. Donner une équation de la droite de régression de y en t (les coefficients seront donnés sous forme décimale, au centième le plus proche) et en déduire l'expression de n en fonction de t associée à cet ajustement.

Partie B
Dans cette partie, on considère que la fonction donnant le nombre d'individus en fonction du temps t (exprimé en mois) est représentée par une solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ Y' - 0,18Y \ =\ -12$$

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0)\ :\ Y' - 0,18Y \ =\ 0$.
2. Déterminer Y_0 une solution particulière constante de (E).
   En déduire les solutions générales de (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $Y(0) = 100$.

Partie C
Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonal FIG. 2 (unités graphiques : 1 cm pour 3 mois sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4000 unités sur l'axe des ordonnées).

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,\ 42]$ par
$$N(t) = \frac{100}{3}e^{0,18t} + \frac{200}{3}.$$
   Déterminer et étudier le signe de N' la fonction dérivée de la fonction N, en déduire le sens de variation de N sur I.
2. Tracer la courbe représentative de N dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ FIG. 2. On suppose que cette fonction représente correctement l'évolution du nombre d'écrevisses.

Partie D
A partir de $t = 42$, on décide d'autoriser la pêche aux écrevisses.
On admet que la population d'écrevisses est alors représentée par la fonction F définie sur l'intervalle $[42,\ 72]$ par
$$F(t) = 64\,000e^{-0,043(t-42)}.$$

1. Etudier F sur l'intervalle $[42,\ 72]$ (variation et valeurs aux bornes).
2. Tracer la courbe représentative de F dans le repère précédent FIG. 2 (**partie C**), sur le même graphique qu'à la question **C-2.** .
3. Déterminer graphiquement l'instant où la population devient inférieure à 32 000 individus.

Exercice 2 [6 points]
Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande. Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photographiques par jour et que les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques d'appareils disponibles, la marque A réalise 38,6% du marché.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un jour tiré au hasard, associe le nombre d'appareils de la marque A vendus ce jour-là.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité que, sur 40 appareils vendus par jour, 20 soient de la marque A.
On en donnera une approximation décimale à 10^{-2} près.

c. Calculer l'espérance mathématique à 10^{-2} près et l'écart type à 1 près de la variable X.

2. On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par une loi normale de moyenne $15,44$ et d'écart type 3. On note Y cette nouvelle variable aléatoire.

a. Donner une approximation de la probabilité de l'événement : « un jour tiré au hasard, il y a exactement 20 appareils de marque A vendus » en calculant $P(19,5 \leq Y \leq 20,5)$ à 10^{-2} près.

b. Déterminer la probabilité de l'événement : « un jour tiré au hasard, 18 au moins des appareils vendus sont de marque A » en calculant $P(Y \geq 17,5)$ à 10^{-2} près.

c. Déterminer la probabilité de l'événement : « un jour tiré au hasard, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 13 et 25, bornes incluses » en calculant $P(12,5 \leq Y \leq 25,5)$ à 10^{-2} près.

Exercice 3 [4 points] **Les parties A et B sont indépendantes.**
Partie A
Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,010 et 0,008.
De plus, la probabilité de l'événement « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » est égale à 0,4.

1. Montrer que la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment est égale à 0,004.

2. En déduire la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne.

Partie B
Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces fabriquées.

1. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2. Une pièce est défectueuse si son diamètre n'appartient pas à l'intervalle $[246\,;\,254]$. On prélève une pièce au hasard dans la production.
Calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse.

2. On admet dans la suite que la probabilité de prélever une pièce défectueuse est égale à 0,046. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 pièces prises au hasard, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot. Un lot de 50 pièces prises au hasard peut être assimilé à un tirage avec remise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer à 10^{-3} près la probabilité d'avoir au plus 2 pièces défectueuses dans un lot.

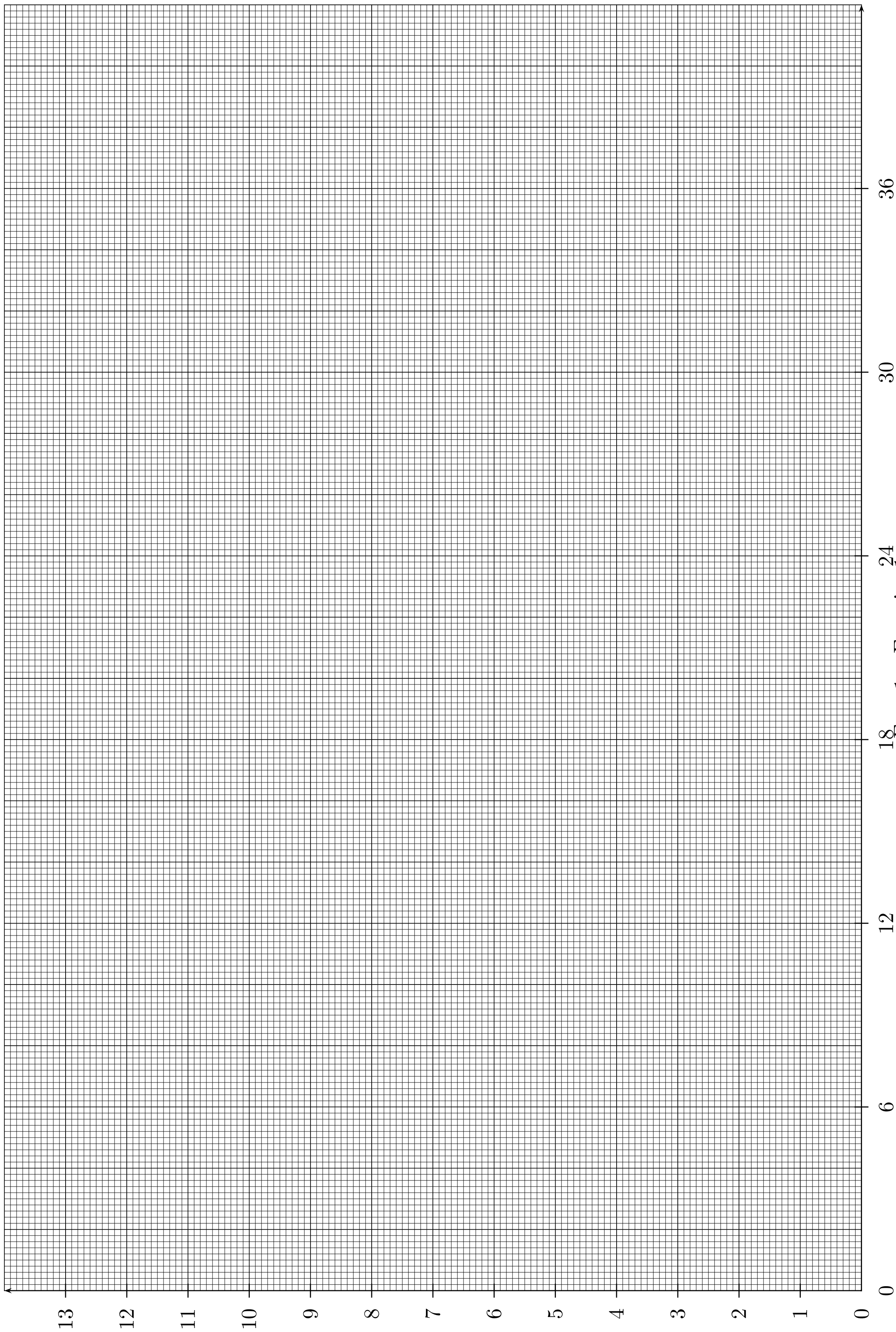

FIG. 1 – Exercice 1

Cette feuille est à rendre avec la copie.

Nom :

Prénom :

Annexe 2

Cette feuille est à rendre avec la copie.

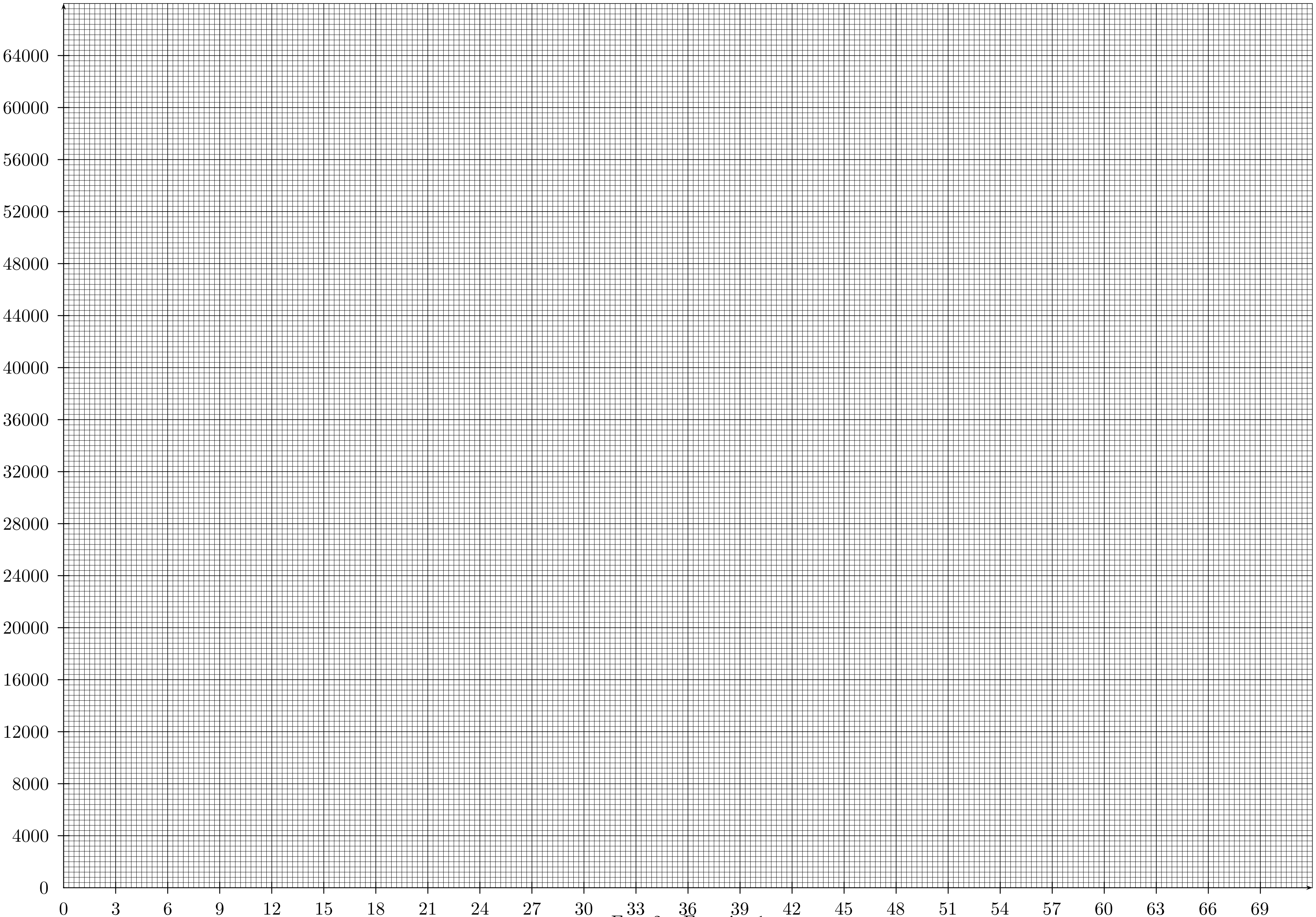

FIG. 2 – Exercice 1