Exercice 1 [10 points]

Partie A

1.

Temps t_i (en mois)	0	6	12	18	24	30	36	42
Effectifs n_i	100	160	350	900	2 500	7 500	22 000	64 000
y_i	4,605	5,635	6,745	7,824	8,896	10,012	11,094	12,164

2. Voir graphique.

3. A l'aide de la calculatrice on obtient $y = 0,18t + 4,58$. On sait que $y = \ln(3n - 200)$ d'où :

$$\begin{aligned}
&\ln(3n - 200) = 0,18t + 4,58 \\
&3n - 200 = e^{0,18t+4,58} \\
&3n = e^{0,18t}e^{4,58} + 200 \\
&n = \frac{e^{4,58}}{3}e^{0,18t} + \frac{200}{3}
\end{aligned}$$

Partie B

1. Les solutions de l'équation différentielle : (E_0) : $Y' - 0,18Y = 0$ sont de la forme $Y(t) = ke^{-G(t)}$ avec G une primitive de la fonction g qui à tout réel positif t associe $-0,18$ et avec k un réel.
On a donc $Y(t) = ke^{0,18t}$ avec k un réel.

2. Y_0 est une solution particulière constante de (E) si, et seulement si, $Y_0' - 0,18Y_0 = -12$ et $Y_0' = 0$.
On a $-0,18Y_0 = -12$ d'où $Y_0(t) = \dfrac{200}{3}$ pour tout réel t positif.
On sait que l'ensemble des solutions de (E) est constitué d'une solution particulière plus les solutions de l'équation homogène (E_0) donc Y est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$Y(t) = ke^{0,18t} + \frac{200}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

3. On a $Y(0) = 100$ d'où $k + \dfrac{200}{3} = 100$. On en déduit $k = \dfrac{100}{3}$ et que $Y(t) = \dfrac{100}{3}e^{0,18t} + \dfrac{200}{3}$.

Partie C

1. On a pour tout $t \in I$: $N'(t) = 6e^{0,18t}$ qui est strictement positive (l'exponentielle est positive) donc la fonction N est strictement croissante sur I.

2. Voir figure 2.

Partie D

1. F est une fonction dérivable. On a donc
$F'(t) = 64\,000 \times (-0,043)e^{-0,043(t-42)} = -2752e^{-0,043(t-42)}$.
F' est strictement négative (l'exponentielle est positive et -2752 est un réel négatif) donc F est strictement décroissante sur l'intervalle $[42, 72]$ et on a
$F(42) = 64\,000$, $F(72) = 64\,000e^{-1,29} \approx 17\,617$.

2. Voir figure 2.

3. D'après une lecture graphique la population devient inférieure à $32\,000$ pour $t_0 \approx 58$ mois.

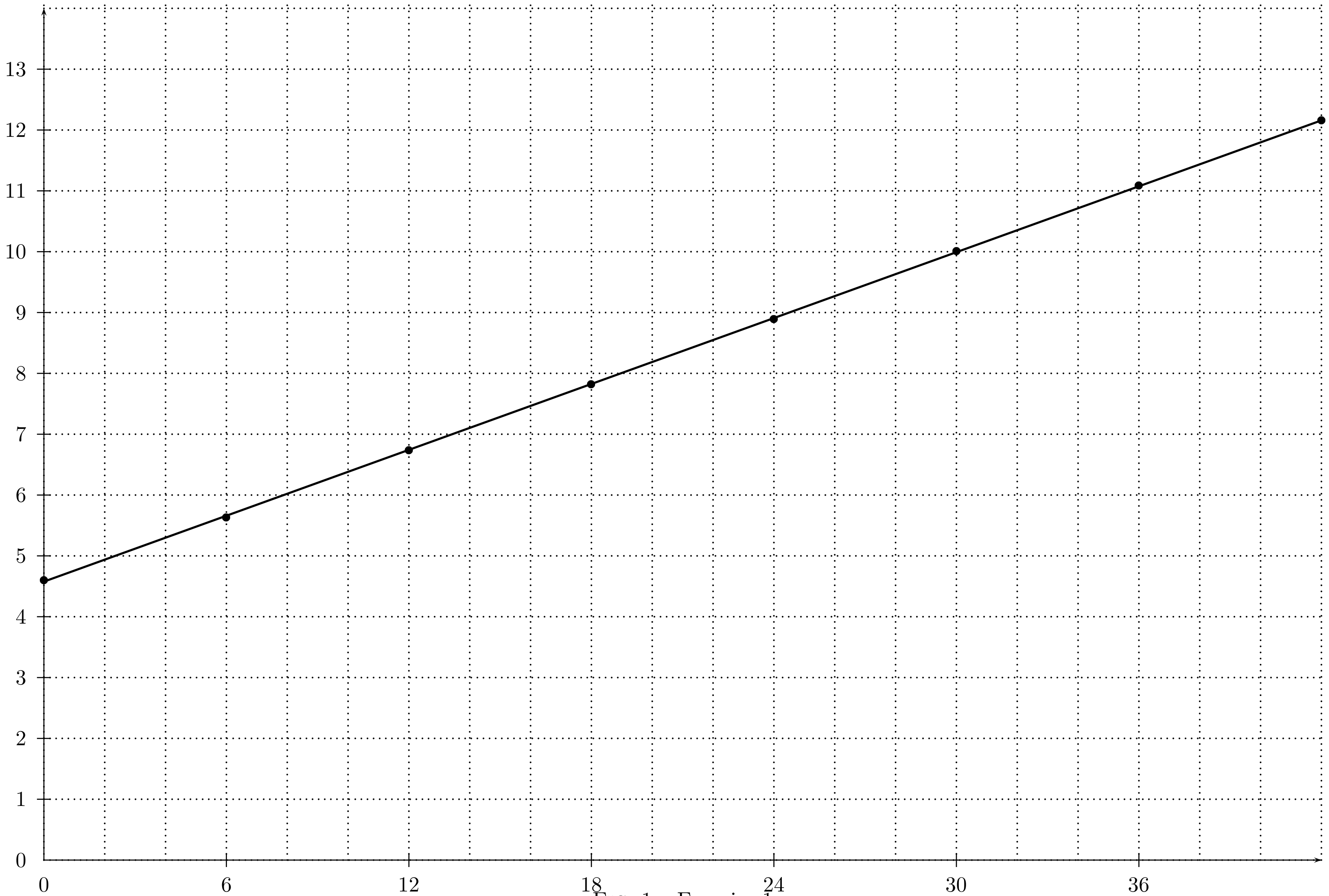

Fig. 1 – Exercice 1

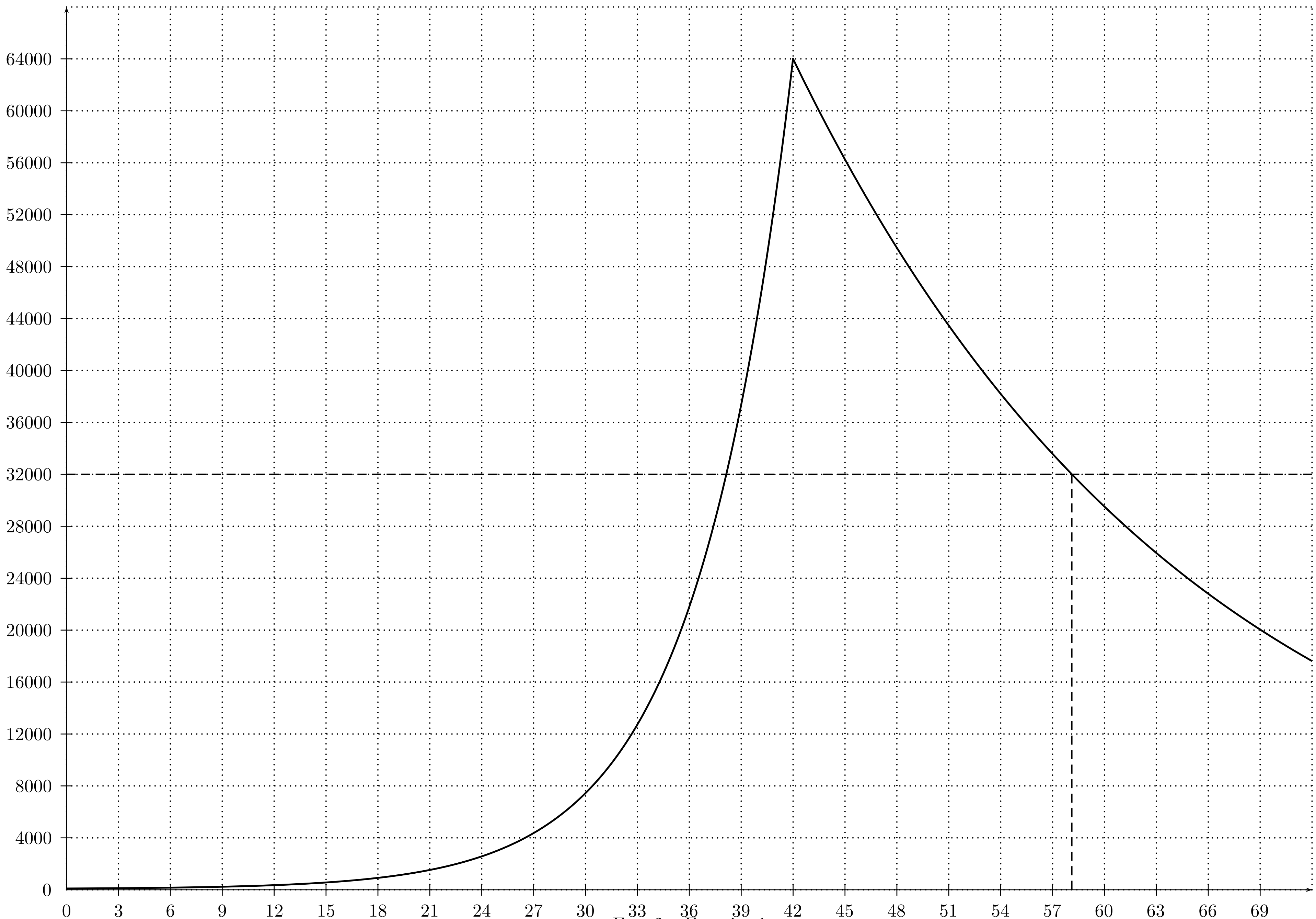

Fig. 2 – Exercice 1

Exercice 2 [6 points]

1. **a.** On a une épreuve aléatoire pouvant déboucher sur deux résultats seulement : il a vendu un appareil de marque A ou non, de probabilités respectives 0,386 et 0,614. Les ventes sont indépendantes les unes des autres donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0,386)$.

   b. $P(X = 20) = C_{40}^{20} \times 0,386^{20} \times 0,614^{20} \approx 0,04$.

   La probabilité que, sur 40 appareils vendus par jour, 20 soient de la marque A est d'environ 0,04.

   c. On sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0,386)$, on a donc

   $E(X) = 40 \times 0,386 = 15,44$ et $\sigma = \sqrt{40 \times 0,386 \times 0,614} \approx 3$

2. **a.** Y suit la loi normale $\mathcal{N}(15,44; 3)$ donc la variable aléatoire $T = \dfrac{Y - 15,44}{3}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

   $P(19,5 \leq Y \leq 20,5) = P(1,35 \leq T \leq 1,69) = \pi(1,69) - \pi(1,35) \approx 0,04$.

   La probabilité de l'évènement « un jour tiré au hasard, il y a exactement 20 appareils de marque A vendus » est d'approximativement 0,04.

   b. $P(Y \geq 17,5) = P(T \geq 0,69) = 1 - \pi(0,69) \approx 0,25$.

   La probabilité de l'évènement « un jour tiré au hasard, 18 au moins des appareils vendus sont de marque A » est d'approximativement 0,25.

   c.

$$\begin{aligned} P(12,5 \leq Y \leq 25,5) &= P(-0,98 \leq T \leq 3,35) \\ P(12,5 \leq Y \leq 25,5) &= \pi(3,35) - \pi(-0,98) \\ P(12,5 \leq Y \leq 25,5) &= \pi(3,35) + \pi(0,98) - 1 \\ P(12,5 \leq Y \leq 25,5) &\approx 0,84 \end{aligned}$$

   La probabilité de l'évènement « un jour tiré au hasard, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 13 et 25, bornes incluses » est d'approximativement 0,84.

Exercice 3 [4 points]

Partie A

Soient les évènements :

A : « la machine M1 tombe en panne pendant la période donnée. »

B : « la machine M2 tombe en panne pendant la période donnée . »

On sait que $P(A) = 0,010 \quad P(B) = 0,008 \quad P_A(B) = 0,4$

1. On sait que $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,004$.

   La probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment est donc 0,004.

2. On sait que $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,996$.

   La probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne est 0,996.

Partie B

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(250; 2)$ donc la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 250}{2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

   $1 - P(246 \leq X \leq 254) = 1 - P(-2 \leq T \leq 2) = 1 - (2\pi(2) - 1) = 2 - 2\pi(2) \approx 0,045\,6$.

   La probabilité d'avoir une pièce défectueuse est de $0,045\,6$.

2. **a.** On a une épreuve aléatoire pouvant déboucher sur deux résultats seulement : la pièce est défectueuse ou non, de probabilités respectives 0,046 et 0,954. Un lot de 50 pièces prises au hasard est assimilé à un tirage avec remise donc les expériences aléatoires sont indépendantes.

   Y suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,046)$.

b. $P(Y \leq 2) = C_{50}^{0} \times 0,046^{0} \times 0,954^{50} + C_{50}^{1} \times 0,046^{1} \times 0,954^{49} + C_{50}^{2} \times 0,046^{2} \times 0,954^{48}$
$P(Y \leq 2) \approx 0,594$
La probabilité d'avoir au plus 2 pièces défectueuses dans un lot est environ 0,594.