Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Définitions

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\longmapsto U_n \end{aligned}$$

Le réel U_n est le **terme** d'indice n.
Définir une suite consiste donc à donner le moyen de calculer ses termes.
Pour cela on peut envisager plusieurs cas .
On peut donner une formule permettant de calculer directement l'image de tout entier n.
On peut donner le moyen de calculer le terme U_n en fonction des termes précédents. Dans ce cas la connaissance du ou des premiers termes est indispensable.

Exemple : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U : n \longmapsto 2n+1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
$U_0 = 2\times 0+1 = 1$; $U_1 = 2\times 1+1 = 3$; $U_2 = 2\times 2+1 = 5$; $U_3 = 2\times 3+1 = 7$; $U_4 = 2\times 4+1 = 9$

1.2 Sens de variation

Définition 1 *Dire qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** signifie que quel que soit l'entier n, on a $U_{n+1} \geq U_n$.*
*Dire qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** signifie que quel que soit l'entier n, on a $U_{n+1} \leq U_n$.*
*Dire qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** signifie que quel que soit l'entier n, on a $U_{n+1} = U_n$.*
*Dire qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** signifie quelle est soit croissnte soit décroissante.*

Remarques :

1. Une suite est croissante (resp. décroissante, resp. constante) à partir d'un certain rang si il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on aie $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} \leq U_n$, resp $U_{n+1} = U_n$).
2. Une suite est strictement croissante (resp. décroissante) si pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} > U_n$ (resp. $U_{n+1} < U_n$).
3. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni monotones.

Théorème 1 *Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (resp. $U_{n+1} - U_n \leq 0$).*

Pour étudier les variations d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on cherchera à déterminer le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$.
Exemple :
Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Etudier le sens de variation de cette suite.
On calcule $V_{n+1} - V_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2-n)}{2} = \dfrac{(n+1)(2)}{2} = n+1 > 0$.
La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Théorème 2 *Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes* ***positifs non nuls*** *est croissante (resp. décroissante) si et seulement si pour tout entier naturel n,*
on a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ (resp. $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$).

Exemple :
Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $W_n = \dfrac{1}{n}$. Etudier le sens de variation de cette suite.
Les termes de la suite sont tous strictement positifs. On peut donc calculer le rapport
$\dfrac{W_{n+1}}{W_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$
La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante.

Théorème 3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*

Si f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = f(n)$ est strictement croissante.

Si f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = f(n)$ est strictement décroissante.

Définition 2 *Dire d'une suite qu'elle est* ***majorée*** *signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n on aie $U_n \leq M$.*
Le réel M est appélé ***majorant****.*
Dire d'une suite qu'elle est ***minorée*** *signifie qu'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n on aie $m \leq U_n$.*
Le réel m est appelé ***minorant***
Une suite ***bornée*** *est à la fois majorée et minorée.*

Remarques :
Une suite décroissante est majorée par son premier terme. Un suite croissante est minorée par son premier terme.
Exemple : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Démontrer que cette suite est bornée.
Tout d'abord, on observe que $U_n > 0$, la suite est donc minorée.
Pour démontrer que la suite est majorée, écrivons $U_n = \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(2n+1)-\frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$
or la quantité $\dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$ est supérieure à 0 donc $U_n < \dfrac{1}{2}$. Conclusion : pour tout entier naturel n on a $0 < U_n < \dfrac{1}{2}$

1.3 Suites usuelles

1.3.1 Suites arithmétiques

Définition 3 *On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que :*
Pour tout entier n : $U_{n+1} = U_n + r$
Le réel r s'appelle "la raison" de la suite arithmétique.

Exemple :
Les tarifs d'un vidéo club sont les suivants :
Un abonnement à 15 € puis chaque film à 3,50 €.
On considère la suite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par P_n le prix payé pour la location du n-ième film.
On constate que pour tout n, $P_{n+1} - P_n$ =3,5 la suite P_n est donc une suite arithmétique.
On a aussi $P_0 = 15$ et $P_n = 3,5n + 15$.

Théorème 4 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.*
Pour tout entier naturel n on a $U_n = r \times n + U_0$.

Exemple :
Les conditions suivantes définissent une suite arithmétique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 2$.
Calculons les cinqs premiers termes : $U_0 = 5$, $U_1 - U_0 = 2$ d'ou $U_1 = 2 + 5 = 7$, $U_2 = 9$, $U_3 = 11$ et $U_4 = 13$.

Théorème 5 *Une suite arithmétique de raison r est :*

croissante *si, et seulement si, r est positif,*

décroissante *si, et seulement si, r est négatif,*

constante *si, et seulement si, r est nul.*

Démonstration : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, on a donc $U_{n+1} - U_n = r$, on se reporte alors à la définition 1 et on conclut.

1.3.2 Suites géométriques

Définition 4 *On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que :*
Pour tout entier n : $U_{n+1} = q \times U_n$
Le réel q s'appelle "la raison" de la suite géométrique.

Exemple :
Sur un échiquier, on dispose un grain de blé sur la première case, 2 sur la seconde, 4 sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois la mise. On considère la suite de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par G_n le nombre de grain à la n-ième case.
On constate que pour tout n, $G_{n+1} = 2 \times G_n$ la suite G_n est donc une suite géométrique de raison 2. On a aussi $G_1 = 1$ et $G_n = 2^n$.

Théorème 6 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.*
Pour tout entier naturel n on a $U_n = U_0 \times q^n$.

Théorème 7 *soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique à termes strictement positifs*
Si $0 < q < 1$ alors la suite est strictement décroissante.
Si $q = 1$ alors la suite est stationnaire.
Si $q > 1$ alors la suite est strictement croissante.

Théorème 8 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non-nulle de raison q est* ***bornée*** *si, et seulement si, $|q| < 1$.*