Chapitre 2

Fonction d'une variable réelle

2.1 Définitions et rappels

Définition 1 *On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application d'une partie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, tel que chaque élément* x *de l'ensemble de départ est une et une seule, image notée* $f(x)$*, dans l'ensemble d'arrivé.*

On note :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Le domaine de définition est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f est définition.
Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f, notée C_f, est l'ensemble des points M de coordonées $(x; f(x))$

Définition 2 *Soit* f *une fonction numérique définie sur intervalle* I *symétrique par rapport à 0.*
f *est* **paire** *(respectivement* **impaire***) signifie que pout tout* $x \in I$ *on a* $f(-x) = f(x)$ *(respectivement* $f(-x) = -f(x)$*).*

Exemple :
Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + 1$ est paire.
Montre que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}^*$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$ est impaire
Remarque : il existe des fonctions qui ne soient ni paire, ni impaire.
Si une fonction est à la fois paire et impaire alors elle est nulle.

Propriété 1 *Dans le plan muni d'un repère* $(O; \vec{i}, \vec{j})$*, si une fonction* f *est impaire alors sa courbe représenative* C_f *admet le point* O *comme centre de symétrie.*
Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$*, si une fonction* f *est paire alors sa courbe représenative* C_f *admet l'axe des ordonnées* (Oy) *comme axe de symétrie.*

Définition 3 *Soient* f *une fonction dont l'ensemble de définition est* D_f *et* g *une fonction dont l'ensemble de définition est* D_g*.*
On note $g \circ f \ x \longmapsto g(f(x))$*.*

2.2 Comparaison de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine D. On rappelle que :
$f = g$ si, et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$
$f \leq g$ si, et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq g(x)$
$f \geq g$ si, et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq g(x)$

Interprétation graphique : $f \leq g$ signifie C_f est "en dessous" de C_g
$f \geq g$ signifie C_f est "en dessus" de C_g

2.3 Fonctions usuelles

2.3.1 Fonctions en escalier

On appelle fonction en escalier toute fonction constante sur chaque intervalle.

Exemple : soit f définie sur $[-5;5]$ par $\begin{cases} f(x) = -1 \text{ pour } x \in [-5;-1[\\ f(x) = 1 \text{ pour } x \in [-1;1[\\ f(x) = 2 \text{ pour } x \in [1;5] \end{cases}$