Chapitre 3

Limites de fonctions

3.1 Généralités :

3.1.1 Limite finie

f est une fonction définie sur un intervalle I sur lequel la variable x peut être rendue infiniment proche du réel a.

Définition 1 *Dire que f admet pour limite le réel l quand x tend vers a signifie que l'écart $f(x) - l$ peut être rendu infiniment proche de 0 (c'est-à-dire $f(x)$ infiniment proche du réel l) pour des valeurs de x proches de a.*

Théorème 1 *d'unicité*
*Si f admet pour limite le réel l quand x tend vers a, alors cette limite est **unique**. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$*

3.1.2 Limite infinie

Définition 2 *Dire que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a signifie que le réel $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout nombre réel M, (c'est-à-dire $f(x)$ peut être rendu infiniment grand pour des valeurs de x proches de a).*
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Définition 3 *Dire que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers a signifie que $-f$ admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$*

3.2 Opérations sur les limites

3.2.1 Tableau récapitulatif :

Lorsque l'on calcule une limite, il convient d'étudier la forme de l'expression de f : produit, sommme, quotient.

f	$l \neq 0$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
g	$l' \neq 0$	0	$\pm\infty$	0	$+\infty$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$
$f-g$	$l-l'$	l	$\mp\infty$	$\pm\infty$	ind	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$f \times g$	$l \times l'$	0	∞^*	ind	$+\infty$	∞^*	ind
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	∞^*	0	∞^*	Ind	∞^*	0

* : $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.

3.2.2 Comparaison

- **Fonctions puissances :**
  $\lim\limits_{x\to+\infty} (x)^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} (x)^\alpha = +\infty 0$ si $\alpha > 0$
- **Fonctions quotients de polynômes (fractions rationnelles) :**
  La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationelle est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient du monône de plus haut degré du numérateur par le monône de plus haut degré du dénominateur
- **Fonction exponentielle :**
  pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x)^\alpha e^x) = +\infty$
  pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x)^\alpha e^{-x}\right) = 0$
- **Fonction logarithme :**
  pour tout $\alpha > 0$ on a $\lim\limits_{x\to 0} (x)^\alpha \ln(x) = 0$
  pour tout $\alpha > 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{(x)^\alpha} = 0$

3.3 Asymptotes

3.3.1 Asymptotes verticales

Définition 4 *Si une fonction f admet une limite infinie en a, $a \in \mathbb{R}$ (ou en a^+, ou en a^-) la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.*

Exemple :
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ définie sur $]2; +\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

3.3.2 Asymptotes "Obliques"

Définition 5 *Une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la représentation graphique d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$*

Exemple : Soit $f : x \longmapsto x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

La droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à C_f car $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x + 2) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.

La droite d'équation $x = 1$ est un asymptote verticale de C_f car

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$