Chapitre 5

Calcul intégral

5.1 Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; on sait que f possède des primitives sur cet intervalle.
Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors on a, pour tout x de I :

$$F(x) = G(x) + c \text{ où c est une constante}$$
$$F(x) - G(x) = c$$

On en déduit que, quels que soient les réels a et b de I,
$F(b) - G(b) = F(a) - G(a) = c$ d'où
$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, le réel $F(b) - F(a)$ est donc indépendant du choix de la primitive de f sur l'intervalle I.

Définition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive de f sur I.*
Etant donnés deux éléments a et b de I, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ce nombre est appelé **integrale de** f **entre** a **et** b. On note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarque :

Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, dx est une notation. Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz$.

Exemples :

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\left((3)^3 - (1)^3\right) = \frac{26}{3}$$

5.2 Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c sont trois réels de I et de F et G sont les primitives respectives de f et g sur I.

Propriété 1
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 2 *Linéarité*
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

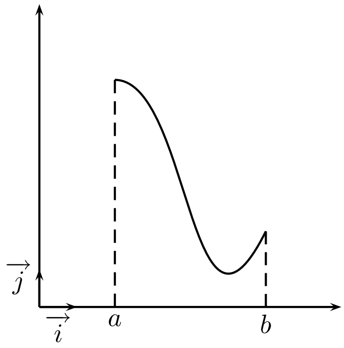
Propriété 3 *Relation de Chasles*

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Propriété 4 *Positivité*

Si $a \leq b$ *et* $f \geq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5.3 Interprétation de l'intégrale : Aire



Théorème 1 *Calcul d'aire*
Si f *est une fonction continue et positive sur l'intervalle* $[a;b]$.
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, *l'aire du domaine défini par :*
$\left\{\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array}\right.$ *est* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Dans le cas ou f est une fonction négative, on considère $-f$.

Théorème 2 *Si* f *est une fonction continue et négative sur l'intervalle* $[a;b]$.
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, *l'aire de la surface délimité par la représentation graphique de* f *et les deux droites* $x = a$ *et* $x = b$ *est :* $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b -f(x)dx$

5.4 Calculs d'intégrales

5.4.1 Utilisation de primitives

Le cas le plus simple est celui où f est la dérivée d'une fonction connue.
Il faut également savoir reconnaître les cas où f est la dérivée d'une fonction composée.
Si F est une primitive de f on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
Rappels :

$\dfrac{u'}{u}$ est la dérivée de $\ln|u|$

$u'e^u$ est la dérivée de e^u

$u'u^\alpha$ est la dérivée de $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, avec $\alpha \neq 1$

i **Exemple :**
Calculer $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+4}dt$
Posons $u(t) = t^2 + 4$ alors $u'(t) = 2t$ et $\dfrac{t}{t^2+4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(t)}{u(t)}$
$A = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+4)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

5.4.2 Integration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est :
$(uv)' = u'v + uv'$ d'où $u'v = (uv)' - uv'$
Si les fonctions u' et v' sont continues alors
$\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt$ soit
$\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Théorème 3 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les fonctions dérivées sont continues sur I.*
Si a et b sont deux éléments de I, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Remarque : cette méthode n'a d'intérêt que si $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ est plus facile à calculer que $\int_a^b u'(t)v(t)dt$

Exemple :

$B = \int_a^b xe^x dx$ Posons $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$ alors $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

On a donc $B = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$

5.5 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue et bornée sur un intervalle $[a; b]$.
Quel que soit le réel x de $[a; b]$, avec $a < b$, on a $m \leq f(x) \leq M$ (avec m minorant de f et M le majorant de f sur l'intervalle $[a; b]$) d'où :
$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$
d'où $[mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$
et $m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)$
On a donc :
$m \leq \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

Définition 2 *Soit f une fonction continue et bornée sur un intervalle I et a et b deux réels de I (a < b). On appelle valeur moyenne de f sur [a; b] le nombre réel :*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b appartenant à I (a < b).*
Si sur un intervalle [a; b], m ≤ f ≤ M, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est comprise entre m et M.