Chapitre 6

Equations différentielles linéaires (EDL)

6.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I sur lequel elles ne s'annulent pas.
On cherche les fonctions y dérivables sur I, telles que, pour tout x de I on ait :

$$(E) \ : \ a(x).y' + b(x).y = c(x)$$

Exemple :
$y' - 2y = e^{2x}$

6.1.1 Equations différentielles linéaires homogènes

Théorème 1 *Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène* $a(x).y' + b(x).y = 0$ *sont les fonctions définies sur* I *par* $y = ke^{-G(x)}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *et* G *est une primitive sur* I *de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$.

Exemple :
Dans notre exemple $g \ : \ x \longmapsto -2$, les solutions de l' E.D.L.H. $y' - 2y = 0$ sont donc de la forme $y = ke^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

6.1.2 Cas général

Théorème 2 *Les solutions de l'équation différentielle linéaire* $(E) : a(x).y' + b(x).y = c(x)$ *s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre. Les solutions générales de* E *sont* $y = ke^{-G(x)} + y_0$ *avec* y_0 *une solution de* (E)

Exemple :
Dans notre exemple il faut trouver une solution particulière, Vérifier que $y_0 = xe^{2x}$ est une solution de l'E.D.L $y' - 2y = e^{2x}$. En déduire toute les solutions de l'EDL.

6.1.3 Méthode de la variation de la constante

La solution générale de l'équation homogène est $y = ke^{-G(x)}$.
On cherche une fonction particulière y_0 telle que $y_0 = k(x)e^{-G(x)}$ soit solution de l'équation (E).
Exemple détaillé :
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ y' + y = 2e^{-x}.$$

Première étape : résoudre l'équation différentielle linéaire homogène (EDLH) $(E_0) \ : \ y' + y = 0$
On a $g \ : \ x \longmapsto 1$ dont une primitive est $G \ : \ x \longmapsto x$, les solutions de (E_0) sont donc de la forme

$y = ke^{-G(x)} = ke^{-x}$ avec k un réel.
Deuxième étape : variation de la constante
On cherche **une** solution de l'EDL (E) de la forme $y_0 = k(x)e^{-x}$ ou cette fois ci $k\ :\ x \longmapsto k(x)$ est un fonction dérivable.
$y_0' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$
$y_0' = (k'(x) - k(x))e^{-x}$
y_0 est une solution de (E)
$y_0' + y_0 = 2e^{-x}$
$(k'(x) - k(x))e^{-x} + k(x))e^{-x} = 2e^{-x}$
$k'(x)e^{-x} = 2e^{-x}$
$k'(x) = 2$
$y_0 = 2xe^{-x}$ est solution de(E)
Trosième étape : conclusion
On applique le théorème 2, les solutions de l'EDL (E) sont $y = ke^{-x} + y_0 = ke^{-x} + 2xe^{-x} = (2x+k)e^{-x}$ avec k un réel.
Il arrive que des conditions initiales soient précisées dans l'enoncé. Par exemple $y(-1) = e$ on obtient alors $k = 3$ et la solution est donc $y = (2x+3)e^{-x}$

Hors programme du groupement D

6.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et f une fonction définie sur un intervalle I.
L'équation $(E)\ :\ a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à termes constants.

6.2.1 Equation différentielle linéaire homogène

On appelle EDLH l'équation $(E_0)\ :\ a.y'' + b.y' + c.y = 0$.

Théorème 3 *Soient φ_1 et φ_2 deux solutions non proportionnelles de l'équation (E_0).*
$\varphi_1 + \varphi_2$ fait partie de l'ensemble des solutions de (E_0).
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\lambda\varphi_1$ fait partie de l'ensemble des solutions de (E_0).
Les solutions de (E_0) sont de la forme $y = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_0$ avec λ et μ deux réels non tous nuls.

Equation caractéristique : on cherche si elle existe une solution de l'EDLH sur $\mathbb{R}$ de la forme $\varphi\ :\ x \longmapsto e^{rx}$
On a $\varphi(x) = e^{rx}$, $\varphi'(x) = re^{rx}$ et $\varphi''(x) = r^2e^{rx}$
La fonction φ vérifie l'EDLH si, et seulement si $a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$ soit $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
C'est-à-dire $ar^2 + br + c = 0$, on appelle cette équation du second degré **l'équation caratéristique** de l'EDLH.
Différent cas sont à envisager suivant la nature des solutions de cette équation caractéristique : 2 solutions réelles, 1 solution rélle double ou pas de solutions réelles.

Théorème 4 *Résolution de l'EDLH Soient l'equation différentielle $(E_0)\ :\ a.y'' + b.y' + c.y = 0$, $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ et $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique de (E_0), de solutions r_1 et r_2.*

- *Si r_1 et r_2 sont rélles et dinstinctes, alors :*
  $\mathcal{S} = \{x \longmapsto C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_1x},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\}$
- *Si r_1 et r_2 sont rélles et confondues, $r_1 = r_2 = r$ alors :*
  $\mathcal{S} = \{x \longmapsto (C_1 + C_2x)e^{rx},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\}$
- *Si r_1 et r_2 sont deux racines complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$:*
  $\mathcal{S} = \{(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))e^{\alpha t},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\}$.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - 3y' - 4y = 0$ avec les conditions initiales $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right.$.
L'équation caractéristique est $r^2 - 3r - 4 = 0$. Cette équation admet deux racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.
Les fonctions solutions sont de la forme $x \longmapsto C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$ avec $C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales sont vérifiées si, et seulement si $\left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 4C_2 = 1 \end{array}\right.$. On obtient $C_1 = -\dfrac{1}{5}$ et $C_2 = \dfrac{1}{5}$.
L'équation différentielle admet pour unique solution satisfaisant aux conditions initiales, la fonction $x \longmapsto \dfrac{4e^{4x} - e^{-x}}{5}$

6.2.2 Cas général

Théorème 5 *Les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E)\ :\ a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$ s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.*