Chapitre 7

Probabilités sur les ensembles finis

7.1 Rappels et compléments

7.1.1 Vocabulaire

- **Expérience aléatoire :** expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue.
  Ex : un lancé de dé.
- **Univers :** ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note Ω.
  Dans notre exemple l'univers est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Evénement :** sous-ensemble de l'univers Ω.
  Ex : $A = \{$ *obtenir un chiffre impair* $\}$.
- **Evénement élémentaire :** événement possédant un unique élément.
  Ex : $B = \{$ *obtenir le chiffre 6* $\}$.
- **Cardinal d'un ensemble :** nombre d'élément(s) de cet ensemble. On note $Card(A)$.
  Ex : $Card(A) = 3$.
- Des événements A,B sont **disjoints**, ou **incompatibles**, signifie que $A \cap B = \emptyset$.
  Dans notre exemple : $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement **contraire** d'un événement A est l'ensemble $\overline{A}$ des événements de Ω n'appartenant pas à A
  Ex : $\overline{A} = \{$ *obtenir un chiffre pair* $\}$.
- L'événement A ou B se note $A \cup B$, est l'ensemble des événements de Ω appartenant à A ou B.
  Ex : $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de l'univers Ω.

7.1.2 Calcul des probabilités

Soit Ω un univers fini.

Définition 1 *On appelle probalité toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ vérifiant les axiomes suivants :*

Axiome 1 $P(\Omega) = 1$

Axiome 2 *Pour tous événements A et B, si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

On déduit les propriétés suivantes :

Propriété 1 *Pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.*

En effet $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$ les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, on a d'après l'Axiome 2 :
$P(A \cup \overline{A}) = 1$
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Dans le partculier où $A = \Omega$ on obtient $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$

Propriété 2 *Pour tous événements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a :*
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition 2 *L'équiprobalité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Dans le cas d'un lancé de dé équilibré, les événements élémentaires sont 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

Propriété 3 *Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A, est :*

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

Pour utiliser cette formule, il faut déterminer le nombre de cas favorables. C'est ce qu l'on appelle dénombrer.
Exercice : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Calculer la probabilité des événements suivants :
- $A = \{\text{tirer un as}\}$. $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$
- $B = \{\text{tirer une carte rouge}\}$. $P(B) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$
- $C = \{\text{tirer un as ou une carte rouge}\}$.
  $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, l'événement $A \cap B$ est "tirer un as rouge" on a $P(A \cap B) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$.
  d'où $P(C) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{9}{16}$
- $D = \{\text{ne tirer ni un as ni une carte rouge}\}$. $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \dfrac{7}{16}$

7.2 Dénombrements

7.2.1 p-listes et arrangement

Soient E et F deux ensembles finis non-vides, soient n le cardinal de E et p un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Définition 3 *Le produit cartésien de E et de F est l'ensemble noté $E \times F$ formé des couples $(e; f)$, avec $e \in E$ et $f \in F$ et on a : $Card\ (E \times F) = Card\ (E) \times Card\ (F)$*

Exemples :
* On considère $E = \{a; b\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$

$E \times F$	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

$E \times F = \{(a;1); (a;2); (a;3); (b;1); (b;2); (b;3)\}$

* Au restaurant, on compose unn menu par le choix d'une entrée e parmi l'ensemble E des 5 entrées, puis d'un plat p parmi l'ensemble P des 4 plats et enfin d'un dessert d parmi l'ensemble D des 6 desserts.
  Un menu entrée+plat+dessert est un triplet (ou 3-uplet) du produit cartésien $E \times P \times D$, on peut composer Card $(E \times P \times D)$ = Card (E) × Card (P) × Card $(D) = 5 \times 4 \times 6 = 120$ menus différents

Définition 4 *Une p-**liste** d'éléments d'un ensemble E est une suite $(a_1; a_2; ...; a_p)$ de p éléments de E.*
L'ensemble des p-listes de E est le produit cartésien $\overbrace{E \times E \cdots \times E}^{p\ fois} = E^P$
Le nombre de p-listes de E est n^p.

Remarques : Une p-liste est toujours ordonnée.
Dans une p-liste, un élément de E peut apparaitre plusieurs fois. **Exemple :** On lance trois dés l'un après l'autre (l'ordre importe). On note le résultat du premier dé, du deuxième puis du troisième. Il y $6 \times 6 \times 6 = 216$ résultats possibles.

Définition 5 *Un **arrangement** de p éléments d'un ensemble E est une p-liste d'éléments distincts de E.*

Exemple : une urne contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire sucessivement et sans remise 3 jetons de cette urne. Le tirage est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$ constitué de 4 éléments. Il y a 4 possibilités pour le premier jeton, il ne reste que 3 possibilités pour le deuxième et 2 possibilités pour le troisième.
On dénombre donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ tirages possibles.

Définition 6 *Soit un entier naturel $n \geq 2$. On appelle $n!$ (lire factorielle n) l'entier naturel défini par :*
$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$
par convention $0! = 1$ *et* $1! = 1$

Théorème 1 *Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.*
Le nombre d'arrangements à $1 \leq p \leq n$ éléments de E noté A_n^p vérifie :
$A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 7 *Une **permutation** d'un ensemble E ayant n éléments est un arrangement des n éléments de E.*

Exemple : Les permuations du mot $ANCRES$ s'appellent des anagrammes. Ainsi $NACRES$, $RANCES$ sont deux des $A_6^6 = \dfrac{6!}{(0)!} = 6! = 720$ permutations du mot $ANCRES$.

Théorème 2 *Soit E un ensemble de cardinal n non nul. Il existe $n!$ permutations des éléments de E.*

7.2.2 Combinaisons

Définition 8 *Une **combinaison** de p éléments d'un ensemble E est une partie $\{a_1; a_2; \ldots; a_p\}$ constituée de p éléments de E.*

Remarques : Une combinaison est donc un partie non ordonnée et sans répétition d'éléments distincts de E.

Théorème 3 *Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $(p \leq n)$:*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ noté aussi } \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

Exemples : $C_6^2 = 15$; $C_8^4 = 70$.

Propriété 4 • $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.
• $C_n^0 = 1$ *et* $C_n^n = 1$.
• $C_n^{n-p} = C_n^p$.
• *Triangle de Pascal :* $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$.

Propriété 5 *Formule du binôme de Newton*
Pour les réels a, b et pour tout entier naturel non-nul n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p.$$

Exemple :
$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 5x^3 + 5x^4 + x^5$

7.3 Situations de référence

Ce sont les tirages dans une urne, la plupart des exercices pouvant se ramener à l'une des trois situations ci-dessous.
Dans tout ce paragraphe, on suppose que l'urne que l'on considère contient n boules ayant toutes la même probabilité de sortie.

7.3.1 Tirages avec remise

Si l'on effectue p tirages successifs avec remise, il y a n^p issues différentes possibles.

7.3.2 Tirages sans remise

Si l'on effectue p tirages successifs sans remise, il y a A_n^p issues différentes possibles si l'on tient compte de l'ordre de sortie, et C_n^p issues différentes possibles si l'on ne tient pas compte de cet ordre.

7.3.3 Tirages simultanés

On se ramène au cas des tirages sans remise. On peut, au choix, considérer ou non que l'ordre a de l'importance, le tout étant de rester cohérent d'un bout à l'autre de l'exercice : si l'on dénombre l'univers des possibles en tenant compte de l'ordre, il faut tenir compte de l'ordre jusqu'à la fin de l'exercice ! Moyennant cette précaution élémentaire, les deux méthodes (ordre ou non) donneront les même résultats en termes de probabilité.

7.4 Probabilités conditionnelles, événements indépendants

Considérons un lancer de dé.
Soit A l'événement « le résultat est pair » : $A = \{2; 4; 6\}$
Soit B l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 4 » : $B = \{4; 5; 6\}$.
On a $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
Dire que A est réalisé signifie que le résultat est 2, 4 ou 6. Alors B est réalisé dans deux des trois cas lorsque le résultat est 4 et 6, c'est-à-dire lorsque $A \cap B$ est réalisé.
Ainsi, la probabilité de B sachant que A est réalisé est $\dfrac{2}{3}$.
On remarque que $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{2}{3}$.
On considère une expérience aléatoire donnée. Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$ (autrement dit, l'événement B n'est pas impossible).

Définition 9 *On appelle probablité de A sachant B, et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ le nombre*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On a donc en particulier, si $P(B) \neq 0$, les relations

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$$

Remarque
En raisonnant sur les cardinaux des ensembles plûtot que sur les probabilités, on a :

$$P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

On dit que les deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (ce qui revient à dire que $P_B(A) = P(A)$).