Chapitre 8

Variable aléatoire à valeurs réelles

8.1 Vocabulaire et défintion

On considère une expérience aléatoire. On note Ω l'univers de cette expérience

Définition 1 *On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω vers $\mathbb{R}$.*

- Si l'image de Ω par X est un intervalle de $\mathbb{R}$ on dit que la variable est continue.
- Si l'image de Ω par X est un ensemble de valeurs isolées de $\mathbb{R}$ on dit que la variable X est discrète.

Exemple :
Une boîte contient six jetons sur lesquels sont inscrits les entiers : -3 ; -2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4. Un tirage consiste à tirer simultanément deux jetons. On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage associe la somme des deux entiers inscrits sur les deux jetons tirés. L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega)$, est l'image de Ω par X, $X(\Omega) = \{-5; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. X est une variable aléatoire discrète.

8.1.1 Probabilité image définie par une variable aléatoire

- On définit une nouvelle probabilité définie sur $X(\Omega)$
- Pour tout k de $X(\Omega)$, on note $P(X = k) = P(\{\omega \in \Omega; X(\Omega) = k\})$
- Exemple : $P(X = 0) = P(\{(-3; 3); (-2; 2)\}) = \dfrac{2}{15}$

8.2 Loi de probabilité – Fonction de répartition

Définition 2 *La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction :*

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ k &\longmapsto P(X = k) \end{aligned}$$

Exemple : on peut representer la loi de probabilité de la v.a. X par un tableau de valeurs.

k	-5	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

Définition 3 *La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq k) \end{aligned}$$

Représentation graphique :

8.3 Espérance, variance et écart-type

On décide de déterminer la moyenne des valeurs prises par la v.a. X, dans notre exemple la somme des valeurs obtenues multipliées par leur probabilité est :

$$\frac{1}{15}\times(-5)+\frac{1}{15}\times(-2)+\frac{2}{15}\times(-1)+\frac{2}{15}\times 0+\frac{2}{15}\times 1+\frac{1}{15}\times 2+\frac{1}{15}\times 3+\frac{1}{15}\times 4+\frac{2}{15}\times 5+\frac{1}{15}\times 6+\frac{1}{15}\times 7=\frac{5}{3}$$

Ce nombre est appelé espérance mathématique de X, on le note $E(X)$.

Définition 4
l'espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire discrète prenant n valeurs x_i avec les probabilités $P(X=x_i)=p_i$, où $1\leq i\leq n$ est :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Propriété 1 *Soient a et b deux réels, X et Y deux variables aléatoires d'espérances mathématiques respectives $E(X)$ et $E(Y)$. On démontre que $aX+b$ est une variable aléatoire d'espérance mathématique $E(aX+b)=aE(x)+b$ et que $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.*

Définition 5 *La variance d'une variable aléatoire X est, si elle existe, l'espérance de la variable aléatoire $(X-E(X))^2$. On la note $V(X)$.*

On a :

$$(X-E(X))^2=X^2-2E(X)\times X+E(X)^2.$$

Donc $V(X)=E(X^2-2E(X)\times X+E(X)^2)$ d'après la propriété $V(X)=E(X^2)+2E(X)\times E(X)+E(X)^2$ d'où

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Propriété 2
La variance d'une variable aléatoire X, si elle existe, est :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2.$$

Ce qui implique en particulier, pour tout réel a et b,

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

Définition 6 *L'écart-type de la variable aléatoire est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.*

8.4 Cas d'une variable aléatoire X continue

On appelle **densité de probabilité** de X la fonction définie de $X(\Omega)$ vers $[0,1]$ par

$$f(k)=P(X=k).$$

Admettons que X ne prenne pas de valeur négative. Autrement dit, si $X(\Omega)\subset[0,+\infty[$, alors **la fonction de répartition** de la variable aléatoire X est la fonction F, définie de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ par

$$F(x)=\int_0^x (f(t))\,dt.$$

On remarque que, la fonction de répartition F est croissante sur $\mathbb{R}$.
On a alors la propriété remarquable suivante :

Propriété 3 *Pour tout a et b tels que $b\geq a\geq 0$:*

$$P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

Définition 7 *l'espérance mathématique d'une variable aléatoire* **continue** *X de densité de probabilité f est :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire continue sont définis de la même manière que pour une variable aléatoire discrète.

Définition 8 *La variance d'une variable aléatoire X est, si elle existe, l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. On la note $V(X)$.*

Propriété 4 *La variance d'une variable aléatoire X, si elle existe, est :*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définition 9 *L'écart-type de la variable aléatoire est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

8.5 Lois de probabilité usuelles

8.5.1 Loi binômiale

On considère une expérience aléatoire n'ayant que deux issues A et $\overline{A}$, on répète cette expérience n fois en supposant que chaque expérience est indépendante des précédentes et on pose p la probablité de A et $q = 1 - p$ la probabilité de $\overline{A}$
Soit X la variable aléatoire qui à n expérience associe le nombre de fois où A est réalisé. La variable aléatoire X suit la **loi de probabilité binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n, p)$.
On admet les résultats suivant :

Propriété 5 *Si une variable aléatoire X suit la* **loi de probabilité binômiale** *de paramètres n et p alors on a :*

- $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$
- $E(X) = np$, $V(X) = npq$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Exemple : Dans une classe de 25 élèves, chaque semaine un professeur choisit un élève pour corriger un exercice. On considère la variable aléatoire X qui à chaque année de 39 semaines associe le nombre de fois que l'élève Dubois est interrogé. Comme il y a 25 élèves la probabilité que l'élève Dubois soit interrrogé est de $\frac{1}{25}$, il y a 39 semaines et les tirages sont indépendants donc la variable aléatoire X suit la loi binômiale $\mathscr{B}(39, \frac{1}{25})$.

La probabilité pour qu'il soit interrogé 7 fois est $P(X = 7) = C_{39}^7 \left(\frac{1}{25}\right)^7 \left(\frac{24}{25}\right)^{32} \approx 7 \times 10^{-5}$.

L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 39 \times \frac{1}{25} = 1,56$

8.5.2 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$, si et seulement si, pour tout entier naturel k,

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On admet les résultats suivants :

Propriété 6 *Si une variable aléatoire X suit la* **loi de Poisson** *de paramètre λ alors on a :*

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

On retiendra :

- que sous certaines conditions, on peut approcher une loi binômiale par une loi de Poisson ayant la même espérance ;

- qu'une loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé. Exemples :
  - les pannes de machines,
  - les sinistres,
  - les appels téléphoniques dans un standard,
  - les files d'attentes,
  - la mortalité,
  - les stocks
  - ...

8.5.3 Loi de normale

Définition 10 *La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m $(m \in \mathbb{R})$ et σ $(\sigma \geq 0)$, notée $\mathscr{N}(m, \sigma)$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$$

On admet les résultats suivants :

Propriété 7 *Si une variable aléatoire X suit la* ***loi normale*** *de paramètres m et σ alors on a :*

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \sigma(X) = \sigma$$

Loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$

Théorème 1 *Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma)$ alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad et \qquad P(T \leq t) = \Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$$

Ce théorème permet de limiter l'étude des lois normales à celle de la loi normale centreé réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.
La densité de probabilité de cette loi et la fonction de répartition sont :