Chapitre 1

Taux d'évolution et indice

1.1 Indice

Soit y_2 et y_1 deux nombres réels strictement positifs.

Définition 1

- *L'indice simple en base 100 (indice) de y_2 par rapport à y_1 est le nombre strictement positif* $I_{2/1} = 100 \times \dfrac{y_2}{y_1}$.

On peut représenter la situation à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

y_1	y_2
100	$I_{2/1}$

Exemple : Indice de Reférence des Loyers IRL

L'IRL a été fixé à 100 au 2ème trimestre 2004 et est révalué chaque trimestre par l'INSEE. Il permet de réviser un loyer d'habitation.

Période	Année	Valeur	Date de parution
2ème Trimestre	2004	100,0	15/10/04
3ème Trimestre	2004	100,75	14/01/05
4ème Trimestre	2004	101,45	12/04/05
1er Trimestre	2005	102,1	08/07/05
2ème Trimestre	2005	102,6	14/10/05
3ème Trimestre	2005	103,07	10/01/06
4ème Trimestre	2005	103,78	07/04/06
1er Trimestre	2006	104,61	11/07/06

Soit un bail de location signé le 1er janvier 2005 pour un loyer mensuel de 480 € , révisable annuellement à la date anniversaire du contrat. Le dernier indice connu à cette date est celui du deuxième trimestre de 2004 publié le 15 octobre 2004. Sa valeur est 100.
Le 1er janvier 2006 intervient la première révision du loyer, le dernier indice connu est celui du 2ème trimestre 2005, il est de 102,6.
Le nouveau montant du loyer sera donc de $480 \times \dfrac{102,6}{100} = 492,48$ € .

Propriété 1

- *Un indice est toujours strictement positif.*
- *Un indice supérieur à 100 correspond à une augmentation.*
- *Un indice inférieur à 100 correspond à une réduction.*

Soit t le taux d'évolution de y_2 à y_1.
On a :

$$y_1 \xrightarrow{\times(1+t)} y_2$$

$y_2 = (1+t)y_1$
$\dfrac{y_2}{y1} = 1+t$
$\dfrac{I_{2/1}}{100} = 1+t$

$I_{2/1} = 100(1+t) = 100 + 100t$

Propriété 2 *Lien entre taux d'évolution et indice*
Les relations entre l'indice $I_{2/1}$ de y_2 par rapport à y_1 et le taux d'évolution t de y_1 à y_2 sont :
$I_{2/1} = 100(1+t) = 100 + 100t$ *et* $t = \dfrac{I_{2/1} - 100}{100}$.

Dans l'exemple précédent l'indice est de 102,6. Le taux d'évolution $t = \dfrac{102,6 - 100}{100} = 2,6\%$. Le montant du loyer a donc progressé de 2,6%.

1.2 Taux dévolution

1.2.1 Taux d'évolution global

Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 7% de 1995 à 2001 et de 4% de 2001 à 2005.
On désire connaître le taux d'évolution de 1995 à 2005.

$$C_{1995} \xrightarrow{\times(1+7\%)} C_{2001} \xrightarrow{\times(1+4\%)} C_{2005}$$

On en déduit que le taux global d'évolution global $(1+T) = (1+7\%) \times (1+4\%)$ d'où $T = 11,28\%$.
Le taux dévolution global de 1995 à 2005 est de 11,28%
Soit y_0, y_1, y_2, ..., y_n les n évolutions. On désigne par t_1, t_2, ..., y_n les taux d'évolutions de ces n évolutions.

$$y_O \xrightarrow{\times(1+t_1)} y_1 \xrightarrow{\times(1+t_2)} y_2 \dots y_{n-1} \xrightarrow{\times(1+t_n)} y_n$$

On a $(1+T) = (1+t_1) \times (1+t_2) \dots \times (1+t_n)$

Définition 2
Le taux d'évolution globale T de y_0 à y_n est égale à $T = (1+t_1) \times (1+t_2) \dots \times (1+t_n) - 1$

1.2.2 Taux d'évolution moyen

Soit n évolutions successives de même taux t, appelé taux moyen, qui permettent d'obtenir le même nombre y_n en partant de y_0.

$$y_O \xrightarrow{\times(1+t)} y_1 \xrightarrow{\times(1+t)} y_2 \dots y_{n-1} \xrightarrow{\times(1+t)} y_n$$

On obtient l'égalité $1 + T = \overbrace{(1+t) \times \dots (1+t)}^{n \text{ fois}} = (1+t)^n$
d'où $t = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$

Définition 3
Le taux d'évolution moyen est t est on a :

$$t = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Exemple : taux de chômage.

Le nombre de chômeurs d'un pays a augmenté de 5% en un an.
On désire connaître le taux d'évolution mensuel moyen du nombre de chômeurs.
$t = (1+5\%)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,41\%$

1.2.3 Approximation de taux

Soit t un petit taux d'évolution t.

Propriété 3 *Approximation.*
Pour deux évolutions succesives de taux t*, le taux global est proche de* $2t$
Le taux dévolution réciproque de t *est proche de* $-t$*.*

Justification :
Lorsque t est proche de 0, par exemple $-1\% \leq t \leq +1\%$ on a :
$0 \leq t^2 \leq 0,000\,1$ deux évolutions succesives correspondent à un taux de $(1+t)^2 - 1 = 2t + t^2$ si on néglige t^2 on connait une approximation de l'odre de 10^{-4} c'est-à-dire de 0,01 point de pourcentage.