Chapitre 2

Probabilités

Dans tout ce chapitre, on considère une expérience aléatoire, Ω son univers, A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$.

2.1 Probabilités conditionnelles

Définition 1 *On appelle probabilité de A sachant B et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ le nombre*
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(B)}$.

Exemple :

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une classe de terminale.

	Int	Ext	DP	Total
Fille	2	3	11	16
Garçon	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

Parmi les élèves de cette classe, on en choisit un au hasard.
On considère les événements suivants :

A : « l'élève choisi est une fille » ;

B : « l'élève choisi est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$. Définir l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$.
2. On choisit une élève parmi les filles.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une demi-pensionnaire.

1. On a : $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17} \approx 47\%$
   et $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{26}{34} = \dfrac{13}{17} \approx 76,5\%$.
   $A \cap B$: « l'élève choisi est une fille et elle est demi-pensionnaire »
   on a donc $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{11}{34} \approx 32\%$.
2. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle : la probabilité de B sachant A d'où :
   $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{11}{34}}{\frac{16}{34}} = \dfrac{11}{16} \approx 68\%$.
   Autre méthode, on a $P_A(B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \dfrac{11}{16} \approx 68\%$.

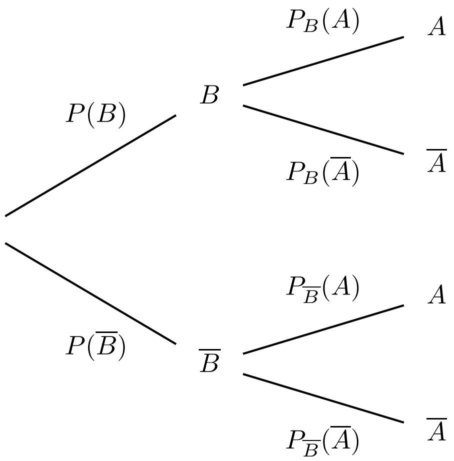
2.2 Arbre probabiliste

Soit B un événement de probabilité différente de 1 et de 0.
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
Pour construire un arbre, on utilise les trois propriétés suivantes :

- la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de ses branches ;
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Dans le cas particulier d'un arbre à deux branches on a :

- $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$;
- $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$;
- $P(A) = P(B) \times P_B(A) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(A)$.



Exemple : Dans une partie du monde, on estime que 15 % de la population est contaminée par un virus X.
La stratégie de dépistage met en place un test. On a observé les résultats suivants :

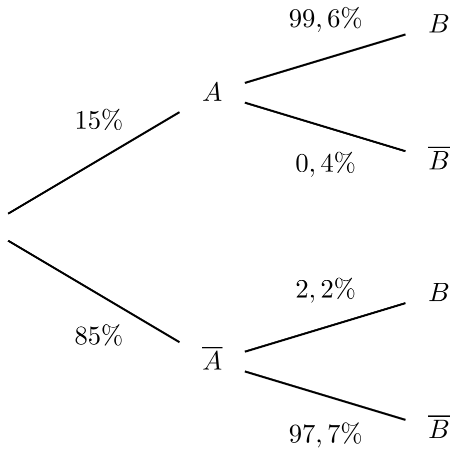
- quand la personne est contaminée par le virus X, le test est positif dans 99,6 % des cas ;
- quand la personne n'est pas contaminée par ce virus, le test est négatif dans 97,8 % des cas.

On considère les événements suivants :

A :« La personne est contaminée par le virus X » ;

B :« La personne a un test positif ».

1. Réaliser un arbre représentant la situation.
2. Calculer $P(B)$.
3. Calculer la probabilité que le résultat du test soit exact.

1. 

2. On sait que $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 15\% \times 99,6\% + 85\% \times 2,2\% = 16,81\%$.
3. On pose C :« le résultat du test est exact ». On a $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, il s'agit de deux événements incompatibles d'où :
   $P(C) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 15\% \times 99,6\% + 85\% \times 97,8\% = 97,9\%$.
   La probabilité que le résultat soit exact est de 97,9%.

2.3 Indépendance de deux événements

Définition 2 *Deux événements A et B sont indépendants signifie que*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Conséquence :
si deux événements A et B sont indépendants, la probabilité de A sachant B ne dépend pas de la probabilité de B. En effet $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Propriété 1 *Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement, si $P_B(A) = P(A)$.*