Chapitre 3

Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Notion de suite

une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

Rang du terme	1	2	3	4	...	n
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Terme	3	9	27	81	...	$u_n = 3^n$

L'image de l'entier n par la suite u se note u_n et se lit « u indice n ». On dit que u_n est le terme de rang n. La suite u se note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.2 Suites arithmétiques

Définition 1 *Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent toujours le même réel, appelé raison, la suite est dite arithmétique.*
• *Dire que u est une suite arithmétique de raison r, signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$), on a :*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Exemples :

- 5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de quatre termes, de premier terme 5 et de raison 3.
- 12 ; 10,5 ; 9 ; 7,5 ; 6 est une suite arithmétique de cinq termes, de premier terme 12 et de raison -1,5.

Théorème 1 *Le terme de rang n d'une suite arithmétique u de premier terme u_1 et de raison r est :*

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Si le premier terme est u_0 alors le terme de rang n est : $u_n = u_0 + nr$.

Exemple :

Soit la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 12$ et de raison 3.
Le terme de rang 50 $u_{50} = u_1 + (50-1) \times r = 12 + 49 \times 3 = 159$.

Théorème 2 ***Somme des n premiers termes***
La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique u de premier terme u_1 est :

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

On retient que la somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à

$$S = \textit{nombre de termes} \times \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Exemple :

Soit la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 2.

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n-1) = \frac{(1+2n-1)(n)}{2} = n^2$$

$S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 3 = 4$; $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$; $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$;

3.3 Suites géométriques

Définition 2
• *Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en multipliant le terme précédent par le même réel, appelé raison, la suite est une suite géométrique.*
• *Si u est une suite géométrique de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$). on a : $u_{n+1} = q \times u_n$*

Exemples :
1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; est une suite géométrique de cinq termes de premier terme 1 et de raison 2.
Les intérêts composés : un capital de 5000 euros est placé au taux annuel de 4,5 %. On a donc :

$$C_0 = 5000$$
$$C_1 = 5000 + 5000 \times 0,045 = 5000 \times 1,045 = 5225$$
$$C_2 = C_1 \times 1,045 = 5355,625$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique il faut :
• s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$
• montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel q constant.

Calcul du terme de rang n
Soit u une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q. On a : $u_2 = q \times u_1$; $u_3 = q \times u_2 = q \times q \times u_1 = q^2 u_1$; $u_4 = q \times u_3 = q \times q^2 u_1 = q^3 u_1$. On admet que pour tout entier n non nul, on a : $u_n = q^{n-1} u_1$.

Théorème 3 *Le terme de rang n d'une suite géométrique u de premier terme u_1 et de raison q est : $u_n = q^{n-1} u_1$. si le premier terme est u_0 alors le terme de rang n est $u_n = q^n u_0$.*

Exemple : soit u une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 3. $u_{10} = 3^9 \times 100 = 1968300$

Théorème 4 ***Somme des n premiers termes***
La somme des n premiers termes d'une suite géométrique u de premier terme u_1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

On retient que la somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique est égale à

$$S = \textit{premier terme} \times \frac{1 - q^{\textit{nb de termes}}}{1 - q}$$

Exemple : sur la première case d'un échiquier on place 1 grain de riz, 2 sur la suite puis 4. Ainsi de suite jusqu'à la dernière case.
Combien de grains de riz faut-il pour compléter l'échiquier de cette façon ?
Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = 2$.
Le nombre de grains riz total est $u_1 + u_2 + \ldots + u_{64} = \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \times 10^{19}$
soit environ 1 844 milliards de milliards.