Chapitre 4

Dérivées et fonctions de référence

4.1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 *On dit que f est dérivable sur I lorsque f admet pout tout x de I un nombre dérivé, $f'(x)$. ndent On appelle fonction dérivée de f la fonction, notée f', qui à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.*

4.2 Dérivées des fonctions de référence

On admet les résultats suivants :

f définie et dérivable sur :	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	k	0
	x	1
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
	x^n	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$]0,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$.
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $f'(x) = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$.

4.3 Opérations sur les fonction dérivables

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

4.3.1 Addition et multiplication

Les fonctions $u+v$, ku ($k \in \mathbb{R}$) et $u \times v$ sont dérivables sur I et on a :
- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(ku)' = ku'$;
- $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemples :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x^2$ alors on a $f'(x) = 3x^2 + 10x$.
Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a $g'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.3.2 Division et inverse :

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et si v est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $a \in I$, $v(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont des fonctions dérivables sur I et on a :
- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$;
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

4.4 Applications :

4.4.1 Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On admet les résultats suivants.

Théorème 1
Si f' est strictement positive sur I (sauf peut-être en un nombre fini de réels de I) , alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I (sauf peut-être en un nombre fini de réels de I), alors f est scritement décroissante sur I.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Étudier les variations de f.
La fonction f est un quotient, on a :

$$u(x) = 2x - 1 \quad v(x) = x + 2$$

$$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = 1$$

d'où $f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

Comme 5 et $(x+2)^2$ sont positifs, on en déduit que $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4.4.2 Extremum local d'une fonction :

Théorème 2 *Soit x_0 un réel de l'intervalle I.*

- *Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.*
- *Si f' est négative « avant » x_0 et positive « après », il s'agit d'un minimun local.*
- *Si f' est positive « avant » x_0 et négative « après », il s'agit d'un maximum local.*

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x$.
Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est une somme on a $f'(x) = -2x + 6$.
La fonction f' s'annule, en changeant de signe, en $x_0 = 3$ elle est d'abord positive puis négative.
La fonction f admet donc un maximum pour $x_0 = 3$ qui vaut $f(3) = 9$.