Problème

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

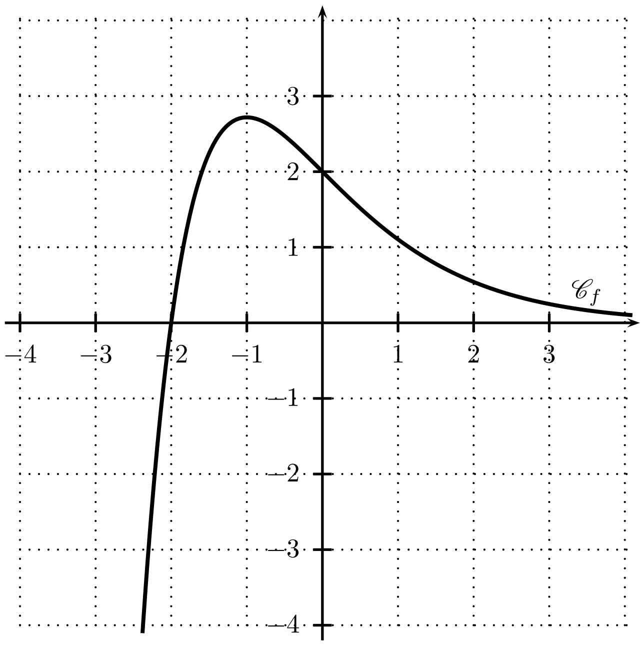
On considère l'équation différentielle $(E) : y\,' + y = \mathrm{e}^{-x}$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y\,'$ la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y\,' + y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer le réel a tel que h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$.

B. Étude locale d'une fonction

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.



1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$?
2. Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
3. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, en déduire les variations de la fonction f et l'existence d'un maximum que l'on précisera.

C. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(x+3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.
2. En déduire la valeur exacte de I puis en donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3}.
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.