Exercice 1

Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang, puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Un étude à permis de constater que, pour tout t de $[0; +\infty[$, on a :

$$f(t) = q(e^{-0,5t} - e^{-t})$$

avec $q > 0$ la quantité de médicament injecté à l'instant $t = 0$.

1. Etude des variations de la fonction f.
   (a) Pour tout t de $[0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= q(-0,5e^{-0,5t} + e^{-t}) \\ f'(t) &= q(-0,5e^{-0,5t}e^{-t}e^{t} + e^{-t}) \\ f'(t) &= qe^{-t}(1 - 0,5e^{-0,5t+t}) \\ f'(t) &= qe^{-t}(1 - 0,5e^{0,5t}) \end{aligned}$$

   .

   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'inéquation $f'(t) \geq 0$.

$$\begin{aligned} & f'(t) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & qe^{-t}(1 - 0,5e^{0,5t}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1 - 0,5e^{0,5t}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \geq 0,5e^{0,5t} \\ \Leftrightarrow\ & 2 \geq e^{0,5t} \\ \Leftrightarrow\ & \ln 2 \geq 0,5t \\ & 2\ln 2 \geq t \end{aligned}$$

   .

   On a donc $S = [0; 2\ln 2]$

   (c) La fonction dérivée f' s'annule en changeant de signe (positive puis négative) en $2\ln 2$, la fonction f admet donc un maximum en $t = 2\ln 2$ qui vaut $f(2\ln 2) = \dfrac{q}{4}$.

   (d) On obtient le tableau de variations de f :

x	0		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{q}{4}$	$\searrow$	0

   (e) La limite de f en $+\infty$ est 0 car on a $\lim\limits_{t \to = +\infty} e^{-0,5t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to = +\infty} e^{-t} = 0$.

2. Contrôle des effets du médicament.
   La quantité contenue dans le sang ne doit pas dépasser le seuil de toxicité $S_M = 2,6$.
   Le médicament est efficace si la quantité contenue dans le sang est supérieure ou égale à $S_m = 1,5$.

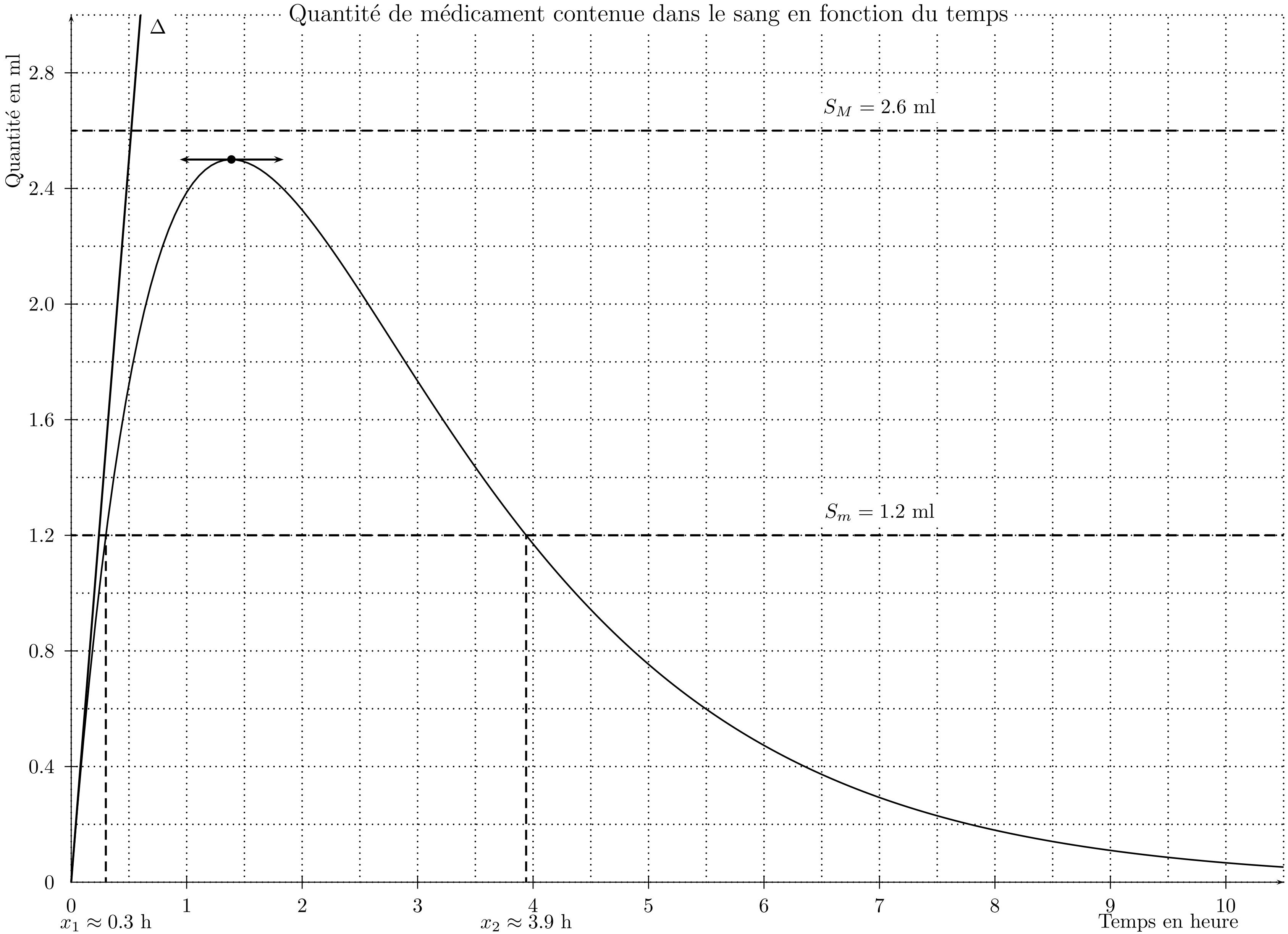
   (a) On sait que f admet un maximum qui vaut $\dfrac{q}{4}$ d'où :

$$\begin{aligned} & f(t) \leq \frac{q}{4} < 2,6 \\ & q < 2,6 \times 4 \\ & q < 10,4 \end{aligned}$$

   On peut donc injecter une quantité q pour $q \in [0; 10,4[$.

   (b) La droite Δ passe par l'origine $O(0,0)$ et a pour coefficient directeur $f'(0) = 5$ on a donc $\Delta\ :\ y = 5x$.

   (c) L'intervalle de temps, pendant lequel le médicament est efficace, est d'après le graphique $[0,3; 3,9]$..


Quantité de médicament contenue dans le sang en fonction du temps
Quantité en ml
2.8
2.4
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0
Δ
$S_M = 2.6$ ml
$S_m = 1.2$ ml
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$x_1 \approx 0.3$ h
$x_2 \approx 3.9$ h
Temps en heure