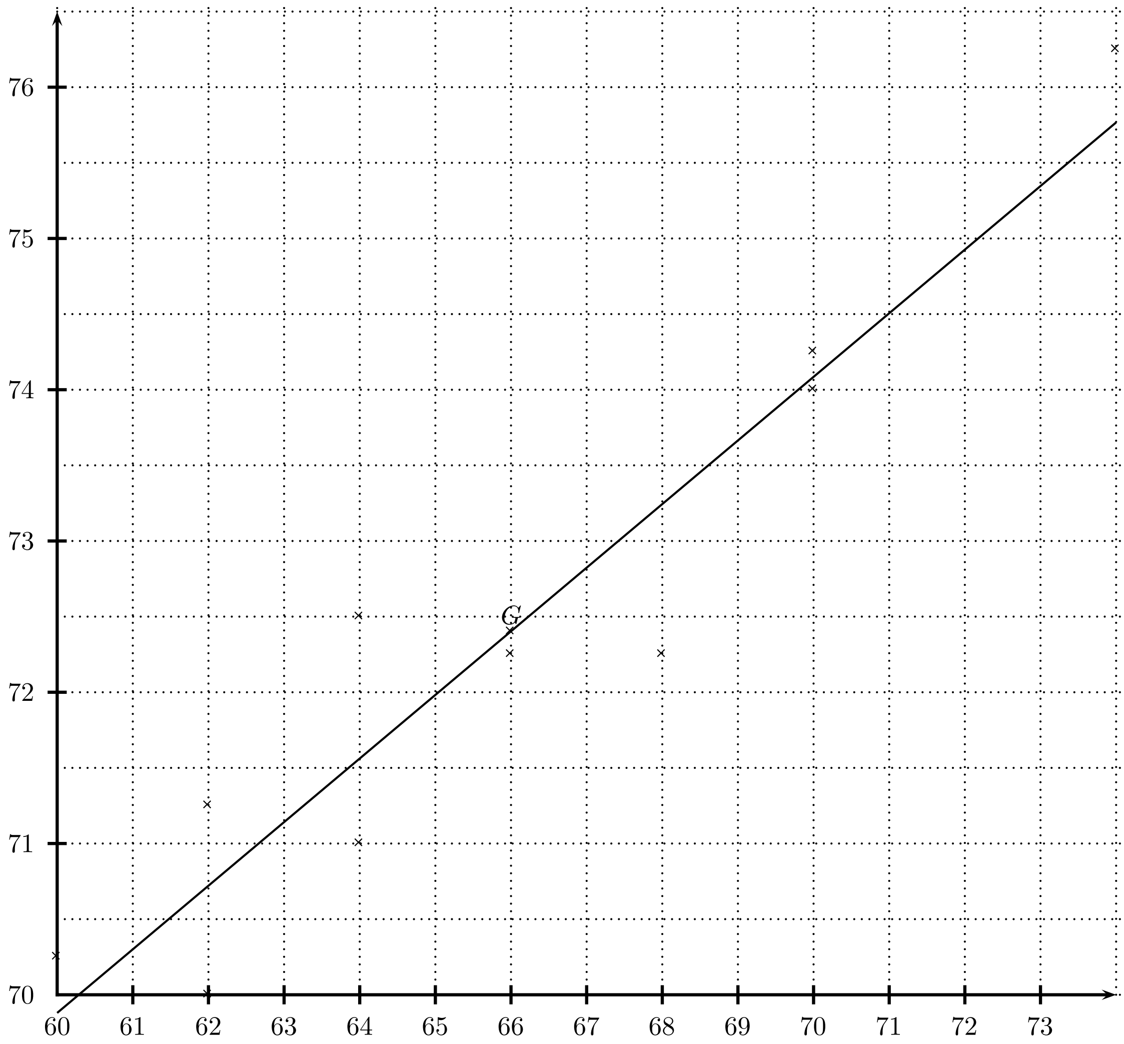
Exercice 1

1. Sur le graphique ci-dessous on a représenté le nuage de points $M(x_i; y_i)$, le point moyen G et la droite $\mathscr{D}$ de régression de y en x.



2. Les coordonnées du moyen sont $G(66; 79,6)$.
3. A l'aide de la calulatrice on obtient $y = 1,682x - 31,4$.
4. On a pour une teneur en carbone de 77, $y = 1,682 \times 77 - 31,4 = 98,114$
   Une estimation de sa charge de rupture est donc $98,114$ kg.

Exercice 2

1. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
   On a en $+\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.
   (cf formulaire . $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha > 0$)
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} + 2 \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} + \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.
2. On peut affirmer puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses asymptote.
3. La fonction f est un produit on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec

$$u(x) = (x+1)^2 \qquad u'(x) = 2(x+1)$$

$$v(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$$

d'où

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$
$$f'(x) = (2x + 2 - x^2 - 2x - 1)e^{-x}$$
$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geq 0$ est équivalent à résoudre l'inéquation $(1 - x^2) \geq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$.

$$\begin{aligned} & f'(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (1 - x^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (1 - x)(1 + x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in [-1; 1] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[-1; 1]$.

5. On peut en déduire le sens de variation de f que l'on récapitule dans un tableau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

La fonction dérivée s'annule en changeant de signe pour $x = 1$ (positive puis négative), la fonction admet donc un maximum local en $x = 1$ qui vaut $f(1) = \dfrac{4}{e}$.
La fonction dérivée s'annule en changeant de signe pour $x = -1$ (négative puis positive), la fonction admet donc un minimum local en $x = -1$ qui vaut $f(-1) = 0$.

6. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) - f(0)$ ce qui donne $T\ :\ y = x + 1$.

7.