A. Résolution d'une équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y\,' + y = 0$ sont les fonctions défines sur $\mathbb{R}$ par $y_0 = k\mathrm{e}^{-x}$ avec k un réel.
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E) si et seulement si $h' + h = \mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned} & h' + h = \mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & a\mathrm{e}^{-x} - ax\mathrm{e}^{-x} + ax\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & a\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & a = 1 \end{aligned}$$

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions générales de l'équation différentielle homogène (E_0) une solution particulière de (E).
   Les solutions de (E) sont $y = k\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$ avec k un réel.
4. Comme f est une solution de (E) elle est donc de la forme $f(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$ avec $f(0) = 2$.
   D'où $2 = k$ et f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

B. Étude d'une fonction

1. les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$.
   (cf formulaire . $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha > 0$)
   d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote.
2. On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ f'(x) &= (1 - x - 2)\mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= (-x-1)\mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= -(x+1)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

3. Comme l'exponentielle est positive $f'(x)$ est du signe de $-(x+1)$.
   - f' est strictement positive sur l'intervalle $x \in]-\infty; -1[$;
   - f' s'annule pour $x = -1$;
   - f' est strictement négative sur l'intervalle $x \in]-1; +\infty[$.

   On en déduit que la fonction f :
   - est strictement croissante sur l'intervalle $x \in]-\infty; -1[$;
   - admet un maximun local pour $x = -1$ qui vaut $f(-1) = \mathrm{e}$ (f' s'annule en changeant de signe) ;
   - est strictement décroissante sur l'intervalle $x \in]-1; +\infty[$.

C. Calcul intégral

1. Il suffit de dériver la fonction F pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= -(x+3)\mathrm{e}^{-x} \\ F'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} + (x+3)\mathrm{e}^{-x} \\ F'(x) &= (x+3-1)\mathrm{e}^{-x} \\ F'(x) &= (x+2)\mathrm{e}^{-x} \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

   F est bien un primitive de f.

2. D'après la question précédente on peut écrire que

$$I = \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x$$
$$I = [F(x)]_0^3$$
$$I = F(3) - F(0)$$
$$I = 3 - 6\mathrm{e}^{-3}$$
$$I \approx 2,701$$

3. Le nombre I représente l'aire de la zone hachurée ci dessous.