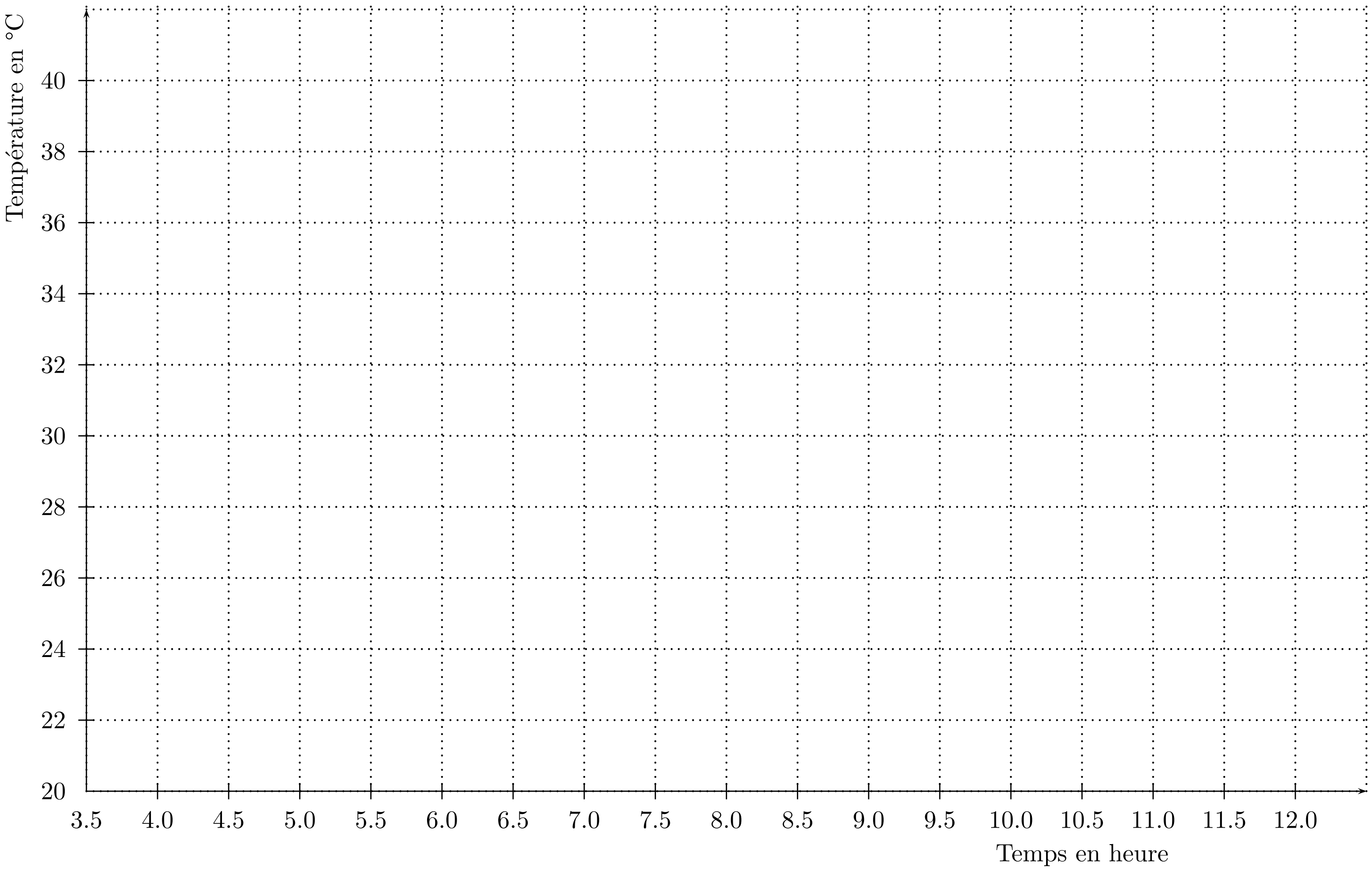
Vendredi matin un peu avant 9h00, vous vous rendez au bureau de votre professeur de mathématiques pour lui poser des questions concernant votre DM.
Après avoir frappé à sa porte sans réponse vous vous décidez à la pousser. C'est là que vous découvrez son corps gisant par terre dans la poussière de craie.
Rapidement vous prevenez la police et leurs experts relèvent immédiatement différents indices dont :

- la température du corps à 9h00 est de 26.6 °C ;
- la température du corps à 10h00 est de 25.5 °C ;
- la température de la pièce est de 21.1 °C.

Vous vous rendez vite compte que pour la police vous êtes le principal suspect, vous avez besoin d'un solide alibi. La veille au soir vous avez étudié jusqu'à minuit mais vous ne savez pas si cela va suffire à vous disculper. Vous devez absolument connaître l'heure du décès.
La variation de la différence entre la température du corps et celle de la pièce est proportionnelle à cette différence.
On désigne par $\theta(t)$ la température du corps en °C à l'instant t en heures.
On obtient l'équation différentielle
$\dfrac{d\theta}{dt} = a(\theta - 21.1)$ avec a une constante à déterminer.
On peut noter l'équation différentielle ainsi :

$$(E)\ :\ \theta' - a\theta = -21.1a$$

1. Résolution de l'équation différentielle.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ \theta' - a\theta = 0$.
   (b) Déterminer une solution particulière constante de (E).
   (c) En déduire les solutions de (E).
2. À l'aide des conditions initiales montrer que les réels a et k vérifient le système :
   $\begin{cases} k\mathrm{e}^{9a} = 5.5 \\ k\mathrm{e}^{10a} = 4.4 \end{cases}$.
   Déterminer les réels a et k.
3. Étude d'une fonction. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3.5; 12]$ par $f(t) = 41\mathrm{e}^{-0.223t} + 21.1$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
   (b) Dresser le tableau de varaition de f.
   (c) Dans repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
   (d) Déterminer graphiquement puis par le calcul une valeur approchée à 10^{-1} près du réel t_1 tel que $f(t_1) = 37.2$.
4. À l'aide de ce qui précède déteminer l'heure approximative du décès.
   Votre alibi sera-t-il suffisant ?


Température en °C
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5
7.0
7.5
8.0
8.5
9.0
9.5
10.0
10.5
11.0
11.5
12.0
Temps en heure

Suppose that you come into your professor's office to ask some questions shortly before 9 :00 a.m. on Friday. You find him lying on the floor of his office in a pool of chalk dust, dead. You quickly call the police and their investigators take several measurements over the next hour, including :
1) the body temperature at 9 :00 a.m. - 80 degrees 2) the body temperature at 10 :00 a.m. - 78 degrees 3) room temperature - 70 degrees (constant)
You quickly realize that the police believe you to be a prime suspect, so you need an alibi. You know that you were studying until midnight, but you aren't sure if that is enough information. You need to know the time of death !
Determine the time of death by creating an exponential model. Use the following statement : the difference between body temperature and room temperature changes at a rate proportional to that difference. How good is your alibi ?