Problème du Grand Duc de Toscane :

Le Grand Duc de Toscane était un grand amateur de jeux de dés.
Son expérience lui a appris qu'en lançant trois dés, il obtenait plus souvent 10 points que 9 points.
Cette constatation lui semblant étrange il énonça donc le paradoxe suivant :
« Alors que les sommes de faces égales à 9 ou à 10 sont obtenues toutes les deux de six façons différentes, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 en réalisant l'expérience ».
Le but de cette activité est de vérifier ce paradoxe puis d'en donner une explication.
On dispose de trois dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, Après les avoir lancés, on calcule la somme correspondante.

1. Déterminer les six façons différentes d'obtenir 9 points à l'aide de trois dés. Même question pour 10 points
2. L'expérience acquise après de nombreuses heures de jeu par le Grand Duc peut-être simuler en quelques minutes par un ordinateur. En effet un tableur peut simuler un grand nombre de lancers.

   (a) Simulation d'une série de 1000 lancers.
   Créer une feuille de calcul dans un tableur.
   Pour simuler le lancer d'un dé on utilise deux fonctions :
   la fonction ALEA qui génère aléatoirement un réel de l'intervalle $[0;1[$ *en multipliant par 6 et ajoutant 1, on obtient un réel de l'intervalle* $[1;7[$*, puis la fonction ENT donne la partie entière.*
   Ecrire la formule suivante dans la case A1 :
   =ENT(6*ALEA()+1)+ENT(6*ALEA()+1)+ENT(6*ALEA()+1)
   Valider, puis recopier la formule en glissant vers le bas jusqu'à A100.
   Sélectionner les cellules de A1 à A100, copier la formule en glissant vers la droite jusqu'à J100.
   On obtient ainsi 1000 lancers de 3 dés.

   (b) Dépouillement des résultats :
   La fonction NB.SI permet de comptabiliser une valeur dans une plage de cellule données. Par exemple ***=NB.SI($A$1 :$J$100 ;9)*** *retournera le nombre de fois que la valeur 9 apparait dans les cellules de* ***A1*** *à* ***J100***
   Recopier et compléter ce tableau :

	9 Points	10 Points
Effectif	=NB.SI($A$1 :$J$100 ;9)	=NB.SI($A$1 :$J$100 ;10)
Fréquence		

   (c) Après avoir réédité l'expérience plusieurs fois à l'aide de la touche F9 répondre aux questions.
   Quel nombre semble apparaitre le plus souvent ?
   Les constatations du Grand Duc de Toscane sont-elles exactes ?
   Est-il necessaire de simuler un plus grand nombre de lancers ?

3. Point de vue probabiliste :
   L'idée est de déterminer les différentes combinaisons à l'aide d'un arbre de probabilité.
   On se rend vite compte que dessiner un tel arbre se révèle fastidieux. On va donc en réaliser une partie à l'aide d'un tableur qui dénombrera les effectifs de chaque valeur.

   (a) Mise en place :
   Il suffit de developper complètement une branche. Supposons que le résultat du premier dé soit 1. Si on détermine les résultats de cette branche pour connaître les résultats de la deuxiéme branche il suffira d'ajouter 1 aux résultats obtenus et ainsi de suite pour déterminer les résultats de la troisième branche jusqu'à la sixième branche.
   Recopier et compléter, dans une nouvelle feuille de calcul, le tableau suivant (on utilisera des « copier coller ») :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3		Total N°1	Total N°2	Total N°3	Total N°4	Total N°5	Total N°6
2	1	1	1							
3	1	1	2							
4	1	1	3							
5	1	1	4							
6	1	1	5							
7	1	1	6							
8	1	2	1							
9	1	2	2							
10	1	2	3							
	⋮	⋮	⋮							
37	1	6	6							

Quelle formule faut-il saisir dans la cellule **E2** pour obtenir la somme des trois dés ? Etendre cette formule jusqu'à la cellule **E37**. Compléter la colonne **F** en utilisant les résultats de la colonne **E**, de même pour les colonnes **G, H, I** et **J**.

(b) Dépouillement des résultats.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	3 Points	4 Points	...	9 Points	10 Points	...	18 Points
Effectif							
Probabilité							

Rappel : pour comptabiliser le nombre de fois qu'une valeur *nb* apparaît on utilise la formule **=NB.SI($E$2 :$J$37 ;nb)**

(c) Déterminer respectivement la probabilité d'obtenir une somme de 9 points, une somme de 10 points. Comparer ces probabilités aux fréquences obtenues dans la partie 2.

4. Conclusion

Tout semble confirmer les impressions du Grand Duc, alors comment expliquer ce paradoxe.

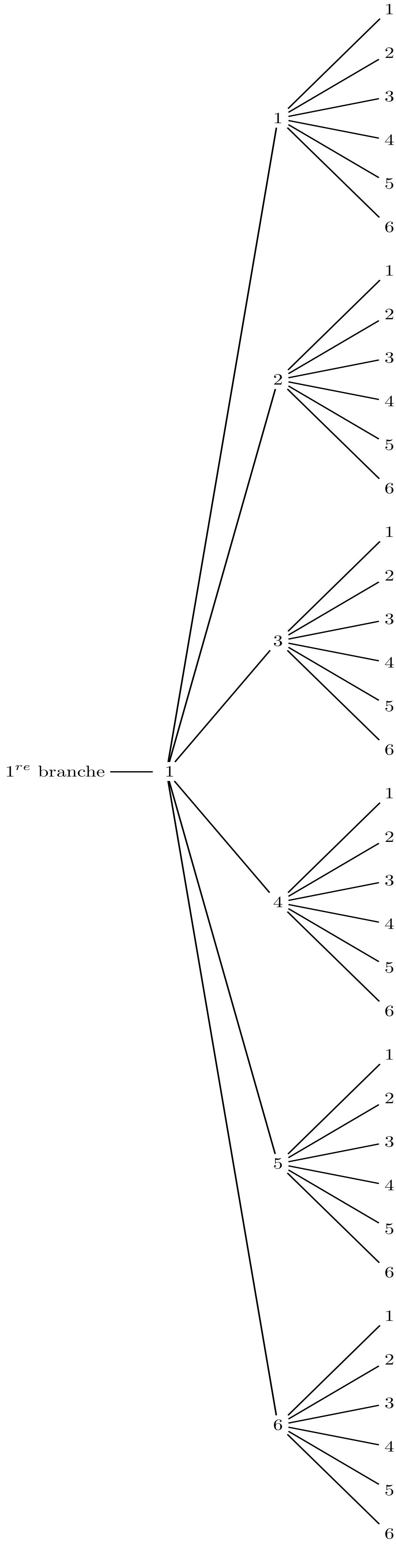
– Il y a autant de façons de faire 9 points que 10 points ;
– on obtient plus souvent 10 points que 9.

En fait les « façons » d'obtenir 9 points ou 10 points ne sont pas équivalentes.

Par exemple la « façon » 1 +4 +4 = 9 donne 3 possibilités différentes alors que la « façon » 1 + 3 +6 =10 donne 6 possibilités.

Il ne s'agit pas d'une situation d'équiprobabilité. Compléter le tableau ci-dessous et calculer la probabilité d'obtenir 9 points et celle d'obtenir 10 points.

9 Points	Nb de permutaion(s)	10 Points	Nb de permutation(s)
1+2+6		1+3+6	6
1+3+5		1+4+5	
1+4+4	3	2+2+6	
2+2+5		2+3+5	
2+3+4		2+4+4	
3+3+3		3+3+4	
	Total =		Total =


1^{re} branche
1
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6