BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPEMENT D

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses Biologiques	1
Bioanalyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène Propreté Environnement	2
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encre et adhésifs	2
Industries Plastiques à Référentiel Commun	1,5
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La calculatrice (conforme à la circulaire n° 99-186 du 16-11-99) est autorisée.

Ce sujet comporte 6 pages (y compris celle-ci)

Exercice 1 [10 points]

A. *Résolution d'une équation différentielle*

1. L'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,05y = 0$ est une équation homogène.
   La fonction définie sur $[0, +\infty[$, $t \mapsto 0,05t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto 0,05$.
   Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par
   $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,05t}$ avec k un réel.
2. La fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E) si et seulement si pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $h'(t) + 0,05h(t) = 1,05$.

$$\begin{aligned} & h'(t) + 0,05h(t) = 1,05 \\ \Leftrightarrow\ & 0 + 0,05 \times a = 1,05 \\ \Leftrightarrow\ & a = 21 \end{aligned}$$

   La fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = 21$ est une solution particulière de (E)
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions générales de l'équation différentielle homogène (E_0) une solution particulière de (E).
   Les solutions sont donc les fonctions f définies sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,05t} + 21$ avec k un réel
4. La solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 100 pour $t = 0$.

$$\begin{aligned} & f(t) = k\mathrm{e}^{-0,05t} + 21 \\ & f(0) = 100 \\ & k + 21 = 100 \\ & k = 79 \end{aligned}$$

   On a donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(t) = 79\mathrm{e}^{-0,05t} + 21$.

B *Étude d'une fonction et calcul intégral*

1. (a) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 21$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} 79\mathrm{e}^{-0,05t} = 0$.
   (b) La courbe $\mathscr{C}$ admet danc une asymptote horizontale Δ d'équation $y = 21$.
2. Résoudre par le calcul dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(t) = 21,1$.

$$\begin{aligned} & f(t) = 21,1 \\ & 79\mathrm{e}^{-0,05t} + 21 = 21,1 \\ & 79\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,1 \\ & \mathrm{e}^{-0,05t} = \frac{0,1}{79} \\ & \mathrm{e}^{-0,05t} = \frac{1}{790} \\ & -0,05t = \ln\left(\frac{1}{790}\right) \\ & t = -\frac{1}{0,05}(-\ln 790) \\ & t = 20\ln 790 \approx 133,4 \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout t de $[0, +\infty[$, $f'(t) = -0,05 \times 79\mathrm{e}^{-0,05t} = -3,95\mathrm{e}^{-0,05t}$.

   (b) Pour tout t de $[0, +\infty[$, on a $\mathrm{e}^{-0,05t} > 0$ donc $f'(t) < 0$.
   D'où

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
f	100 $\searrow$	21

4. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$ est $v_m = \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{120} f(t)dt$.
   Une primitive de f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(t) = -\frac{79}{0,05}\mathrm{e}^{-0,05t} + 21t = -1580\mathrm{e}^{-0,05t} + 21t.$$

   On a donc

$$V_m = \frac{1}{120}\int_0^{120} f(t)dt = \frac{1}{120}\left[F(t)\right]_0^{120}$$
$$V_m = \frac{1}{120}(F(120) - F(0))$$
$$V_m = \frac{1}{120}(-1580\mathrm{e}^{-6} + 21 \times 120 + 1580)$$
$$V_m = 21 + \frac{1580}{120}(-\mathrm{e}^{-6} + 1)$$
$$V_m = 21 + \frac{79}{6}(1 - \mathrm{e}^{-6})$$

C. *Exploitation des résultats des parties A et B*

1. D'après la question B. 2 ˚, on sait que $f(t) = 21,1$ pour $t \approx 133,4$ deplus la fonction f est strictement décroissante. On en déduit qu'à partir de l'instant $t = 134$ minutes la température du thé est inférieure à 21,1 ˚ C.
2. Graphiquement on peut lire que c'est pour l'instant $t = 14$ minutes que la température du thé est de 60 ˚ C.

Exercice 2 [10 points]

les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un industriel de l'agroalimentaire conditionne du ketchup dans des bouteilles en verre.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi normale*

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée associe la masse de sauce, exprimée en grammes, contenue dans cette bouteille.
On suppose que la variable aléatoire x suit la loi normale de moyenne 570 et d'écart type 4.
Une bouteille n'est commercialisée que si la masse de sauce qu'elle contient est comprise entre 560 grammes et 580 grammes.

1. On cherche $P(560 \leq X \leq 580)$, or la variable alétoire $T = \dfrac{X - 570}{4}$ suit la loi normale centrée réduite. $P(560 \leq X \leq 580) = P(\dfrac{560 - 570}{4} \leq T \leq \dfrac{580 - 570}{4}) = P(-2,5 \leq T \leq 2,5) = 2\pi(2,5) - 1 = 0,987\,6 \approx 0,99$.
   La probabilité qu'une une bouteille prélevée au hasard dans la production de la journée soit commercialisée est de 99%.
2. On cherche $P(X \geq 565) = P(T \geq \dfrac{565 - 570}{4}) = P(T \geq -1,25) = P(T \leq 1,25) = \pi(1,25) = 0,894\,4 \approx 0,89$
   la probabilité que la masse de sauce soit supérieure ou égale à 565 grammes est de 89%.

B. *Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

1. Dans un stock important de bouteilles destinées aux livraisons en France, 10% des bouteilles contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.
   Les bouteilles sont livrées en France par cartons de 16.
   On prélève au hasard 16 bouteilles de ce stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 16 bouteilles.
   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 16 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.
   (a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(16; 0,1)$:
      - Y comptabilise le nombre bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes ;
      - deux issues contraires, la masse est inférieure ou égale à 565 grammes ou pas $p = 10\% = 0,1$ et $q = 90\% = 0,9$;
      - on répéte 16 fois la même expérience aléatoire ;
      - les expériences aléatoires sont indépendantes car le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

   (b) $P(Y = 0) = \dbinom{16}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^{16} = 0,9^{16} \approx 0,19$
      La probabilité qu'aucune bouteille de ce prélèvement ne contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes est de 19%.

(c) $P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0,9^{16} + \binom{16}{1} \times 0,1^1 \times 0,9^{15} = 0,9^{16} \approx 0,51$

La probabilité que, dans un tel prélèvement, une bouteille au plus, contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes est de 51%.

2. Les bouteilles destinées à l'exportation sont conditionnées par colis de 100.

On prélève au hasard 100 bouteilles pour vérification dans le stock destiné à l'exportation. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bouteilles.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 100 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

On admet que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,1.

(a) Pour que la loi suivie par Z soit approchée par une loi de Poisson il faut qu'elles aient la même espérance d'où $\lambda = E(Z) = 100 \times 0,1 = 10$.

Le paramètre λ de cette loi de Poisson est donc $\lambda = 10$.

(b)

$$P(Z_1 \leq 5) = P(Z_1 = 0) + \ldots + P(Z_1 = 5)$$
$$P(Z_1 \leq 5) = 0 + 0 + 0.002 + 0.008 + 0.019 + 0.038$$
$$P(Z_1 \leq 5) = 0.067$$
$$P(Z_1 \leq 5) \approx 0.07$$

C. *Intervalle de confiance*

On cherche un intervalle de confiance centré sur $\overline{s} = 137,7$ avec le coefficient de confiance 95 %.

L'intervalle de confiance est $[\overline{s} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{s} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ avec t tel que $2\pi(t) - 1 = 95\%$.

On a $\pi(t) = 1,95 \div 2 = 0,975\%$ par lecture inverse dans la table de la loi normale centrée réduite on trouve $t = 1,96$.

On obtient l'intervalle de confiance centré sur $\overline{s}$ de moyenne μ des masses de sucre contenu dans chacune des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 % $[134,96; 140,45]$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE