Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$.

1. (a) Exprimer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

   En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = \sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   (c) Justifier que la limite de f en $+\infty$ est 0.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -2e^{-x}\sin x$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I et dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

Exercice 2

Datation par le carbone 14

L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé sous l'effet du rayonnement cosmique, en carbone 14, radioactif noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. À leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le carbone ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être vivant peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste.

Soit $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique :

on montre que $N'(t) = -0,0001238N(t)$. La vitesse de désintégration est donc proportionnelle au nombre d'atomes présents.

1. En appelant N_0 le nombre d'atomes de ^{14}C initial, déterminer $N(t)$ en fonction de t.
2. Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 20 000ans ?
3. On appelle période (ou demi-vie) du carbone ^{14}C, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

   Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la période du ^{14}C.
4. On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. On constate qu'ils sont perdu 30% de leur teneur en carbone. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'âge du fragment d'os.

LaTeX