Durée 2 heures. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 **13 points**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm).

Partie A

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$

   b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)$,

   en déduire la limite de f en $-\infty$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

   a) Déterminer la limite de h en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   b) Étudier le signe de $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie B

1. **a)** Après avoir justifié la dérivabilité de la fonction f, déterminer $f'(x)$.

   b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x-1)(1-\mathrm{e}^{-x})$.
   Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c) Dresser le tableau de variation complet de f.

2. Dresser le tableau de variation complet de g.
3. Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm).

Exercice 2 **7 points**

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \qquad \text{pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array}\right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de déterminer cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

   a) Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer g' la fonction dérivée de la fonction g. En déduire que g est constante.

   c) Montrer que pour tout nombre réel x, $f(-x)f(x) = 16$.

   d) Soit l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est une solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. **Question de cours**

   a) On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

   b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

Cet énoncé est à rendre avec la copie.