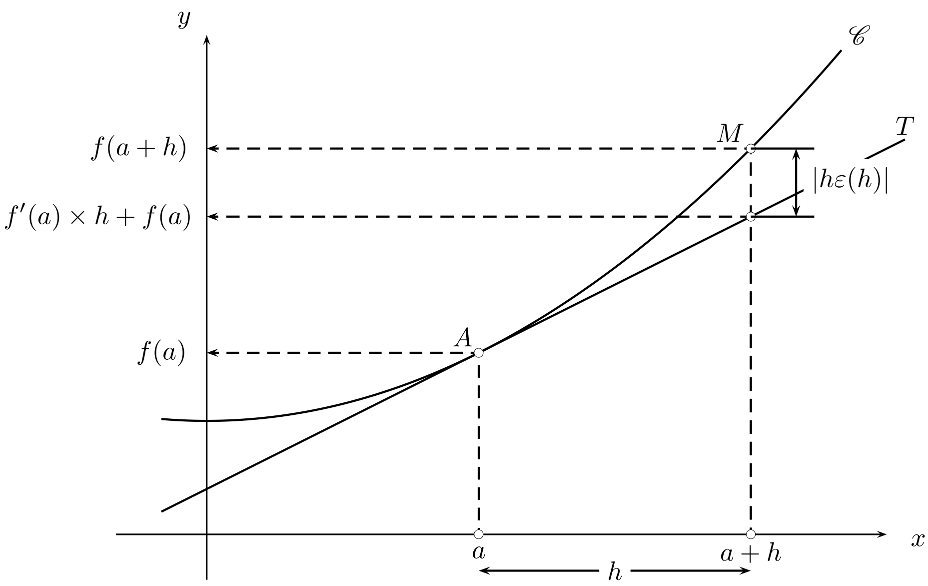
1 Approximation Affine

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f peut être approchée par une fonction affine au voisinage de a.
Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que pour tout h tel que $a + h \in I$ on a :

$$f(a+h) = f'(a) \times h + f(a) + h \times \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Graphiquement le point d'abscisse $a + h$ de la courbe $\mathscr{C}$ est « proche » du point d'abscisse $a + h$ de la tangente T. C'est-à-dire pour h assez « petit » $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$. La distance les séparant est $|h\varepsilon(h)|$



1. (a) Montrer que pour h « petit » tel que $1 + h \geq 0$, $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{1}{2}h$.
   (b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,1}$ et $\sqrt{1,5}$.
2. Montrer que pour h « petit » tel que $1 + h \neq 0$, $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

2 Méthode d'Euler

2.1 Principe de la méthode :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Cette fonction n'est pas connue mais on suppose que sa dérivée l'est.
À partir d'un point $M(x_0, y_0)$ connu de $\mathscr{C}$, on peut, en utilisant des approximations affines successives, tracer une ligne polygonale proche de la courbe $\mathscr{C}$.

2.2 Une équation différentielle :

On va utiliser la méthode d'Euler pour chercher à obtenir une représentation graphique approchée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour simplifier on va se contenter de travailler dans l'intervalle $I = [0; 1]$.

On pose :
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h = \dfrac{1}{n}$, il s'agit du pas ;
- $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h$, …, $x_{n-1} = x_{n-2} + h$, $x_n = 1$, il s'agit de la subdivision ;
- $y_0 = f(x_0) = 1$ et y_k l'approximation de $f(x_k)$ obtenue par la méthode d'Euler.

On a $x_1 = x_0 + h$ d'où $f(x_1) = f(x_0 + h) \approx f'(x_0) \times h + f(x_0)$ or $f'(x0) = f(x0) = 1$ alors $f(x_1) \approx h + 1$ on obtient donc $y_1 = 1 + h$ comme approximation de $f(x_1)$

1. En utilisant $f(x_1) \approx y_1$, déterminer y_2.
2. Pour tout $2 \leq k < n$ exprimer y_{k+1} en fonction y_k et x_{k+1} en fonction x_k.
3. En déduire l'expression de y_k uniquement en fonction de k et de h.
4. Compléter : pour tout entier $k \leq n$ on a
$\begin{cases} x_k = \dots \\ y_k = \dots \end{cases}$

2.3 Mise en œuvre avec un tableur :

On souhaite à l'aide d'un tableur-grapheur calculer les réels x_k et y_k et représenter graphiquement la ligne polygonale formée des points $M(x_k, y_k)$.

1. Pour commencer on fixe $n = 5$, soit un pas de $h = \dfrac{1}{5} = 0,2$. Compléter la feuille de calcul ci-contre, préciser les formules que l'on peut saisir dans les cellules $B4$ et $C4$ pour calculer les x_k. et les y_k.
2. Représenter graphiquement les points M_k.
3. Faire des essais avec $n = 10$, $n = 25$ et $n = 100$.

	A	B	C	D
1	$n =$	5	h=	
2	Rang k	x_k	y_k	
3	0	0	1	
4	1			
5	2			
6	3			
7	4			
8	5			

2.4 Mise en œuvre avec GeoGebra :

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on peut aussi représenter graphiquement la ligne polygonale formée des points $M(x_k, y_k)$.

1. Créer un curseur n variant de 0 à 20 avec un incrément de 1, puis le réel $h = \dfrac{1}{n}$.
2. Étant donné le caractère récursif de la méthode d'Euler, on va créer une macro qui, à chaque demande, va répéter la procédure.
   (a) Placer le point A de coordonnées $(0, 1)$.
   (b) Dans la barre de saisie, créer le point M_1=(x(A)+h,y(A)*(1+h)).
   (c) Création de la macro,
   - aller dans le menu *Outils>Créer un nouvel outil* ;
   - Objets finaux, sélectionner le point M_1 ;
   - Objets initiaux, Nombre n et A.

   Nommer et enregistrer la macro, pour l'utiliser cliquer sur l'icône en haut à droite.
   Il suffit alors de préciser comme nombre h et comme point M_1 pour créer un nouveau point.
3. Utiliser la macro pour créer suffisament de points, relier les par des segments.
   Faire varier n et observer l'allure de la ligne polygonale.
4. À l'aide de GeoGebra, sur l'intervalle $[0; 1]$, tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle notée exp. Observer et comparer la courbe tracée à la ligne polygonale obtenue par la méthode d'Euler.