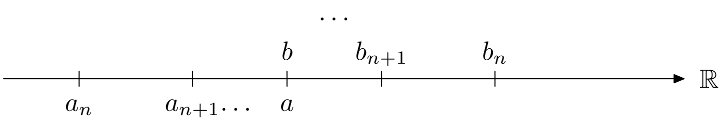
Chapitre 10

Suites adjacentes

Dire que deux suites sont adjacentes revient à dire qu'elles sont respectivement la suite des extrémités gauches et la suite des extrémités droites d'une suite de segments emboîtés dont la suite des longueurs tend vers 0.
Ce que l'on formalise ainsi :

Définition 1
Dire de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elles sont **adjacentes** signifie que :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(b_n - a_n\big) = 0$.



Exemple montrer que les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Théorème 1
Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

■ **Démonstration :**
soit u et v deux suites adjacentes telles que u soit croissante, v décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(v_n - u_n\big) = 0$.

1. Soit w la suite définie pour tout entier n par $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que la suite w est décroissante.
   b) Montrer par l'absurde que pour tout entier n que $w_n \geqslant 0$.
   c) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$

2. Montrer que la suite u est une suite croissante majorée et que la suite v est une suite décroissante minorée.

3. En déduire que la suite u converge vers un réel L et que la suite u converge vers un réel L'

4. Montrer que $L = L'$.

Certaines propriétés donnent l'existence d'une limite mais sans l'expliciter pour y remédier on a le résultat suivant :

Propriété 1
Si une suite (u_n) converge vers un réel L et si la fonction f est continue en L alors la $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.

Dans le cas des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue et u une suite convergente, comme les suites (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite, L est donc **une des solutions** de l'équation $x = f(x)$.